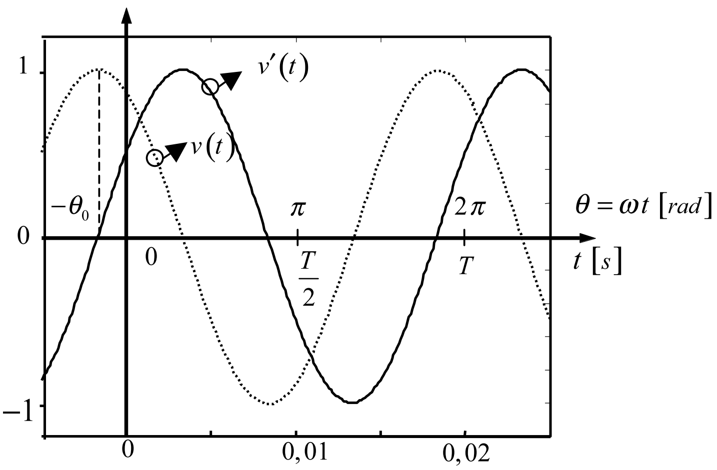
Signaux sinusoïdaux. Régime harmonique

Objectifs:

Présenter les outils mathématiques et graphiques qui facilitent l'étude du <u>régime sinusoïdal permanent</u> aussi appelé <u>régime harmonique</u>.
Définir les impédances complexes des dipôles élémentaires (RLC)

Grandeurs temporelles



Valeurs instantanées

$$v(t)=\hat{V}\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$v'(t)=\hat{V}\sin(\omega t+\theta_0)$$

<u>Exemple</u>

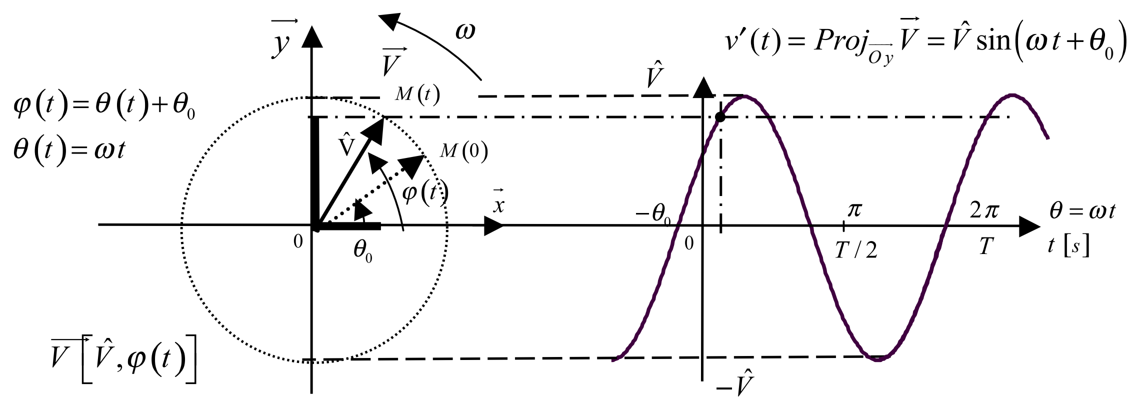
$\hat{V}=1\ volt \quad f=50\,Hz$

$\hat{V}=V\sqrt{2}$	valeur maximale ou amplitude de *v(t)*	$f=1/T$	fréquence du signal	$[Hz]$
V	valeur efficace de *v(t)*	T	période du signal	$[s]$
		$\omega=2\pi f$	pulsation du signal	$[rad/s]$
		θ_0	phase à l'origine	$[rad]$

Valeur efficace : valeur de la grandeur continue qui produira les mêmes effets calorifiques que le signal étudié

Forme quelconque $V^2=\langle v^2(t)\rangle=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{(T)} v^2(t)dt$ **Signal <u>sinusoïdal</u>** $V=\dfrac{\hat{V}}{\sqrt{2}}$

Représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales :

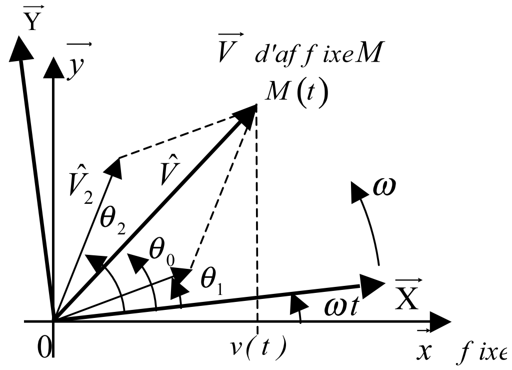


Les projections sur l'axe $\overrightarrow{Oy}$ d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe M et de norme $\hat{V}$, tournant à ω , permettent de retrouver une sinusoïde d'amplitude $\hat{V}$ et de pulsation ω.

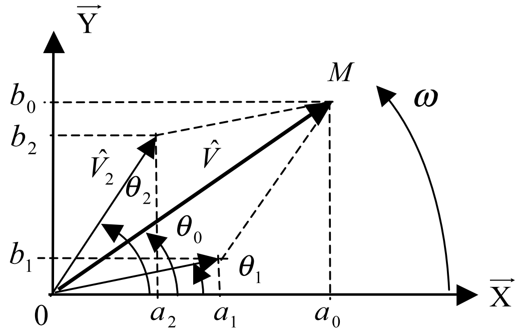
Représentation de FRESNEL

Application au calcul de la somme de 2 grandeurs sinusoïdales :

$$v_1(t) = \hat{V}_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$
$$v_2(t) = \hat{V}_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \text{ dans } (0\vec{X}\vec{Y})$$



Repère $(0\vec{x}\vec{y})$ fixe



Repère de FRESNEL

Repère $(0\vec{X}\vec{Y})$ tournant à $\omega_{/(0\vec{x}\vec{y})}$ $\Rightarrow$ les vecteurs sont fixes dans le repère $(0\vec{X}\vec{Y})$ tournant à $\omega_{/(0\vec{x}\vec{y})}$

$$Proj_{\vec{Ox}}\vec{V} \qquad a_0 = a_1 + a_2$$
$$Proj_{\vec{Oy}}\vec{V} \qquad b_0 = b_1 + b_2$$

$$\hat{V} \equiv \sqrt{a_0^2 + b_0^2} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\frac{b_0}{a_0}\right)$$

$$\hat{V} = \sqrt{\hat{V}_1^2 + \hat{V}_2^2 + 2\,\hat{V}_1\hat{V}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad \theta_0 = \arctan\left(\frac{\hat{V}_1\sin(\theta_1) + \hat{V}_2\sin(\theta_2)}{\hat{V}_1\cos(\theta_1) + \hat{V}_2\cos(\theta_2)}\right)$$

$$\boxed{v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \theta_0)}$$

! On n'utilise QUE des cosinus ou QUE des sinus pour que tous les signaux aient la même origine des phases

Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

Partant de $v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \theta_0)$ nous formons :

$$\underline{v}(t) = v(t) + j\,v'(t) = \hat{V}\ [\cos(\omega t + \theta_0) + j\ \sin(\omega t + \theta_0)]$$

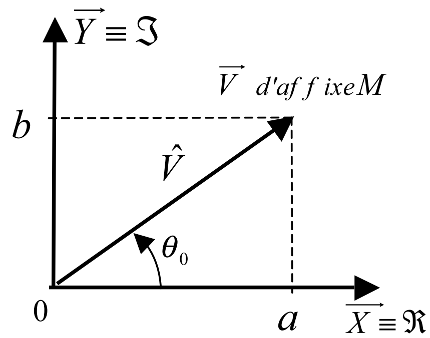
$$\underline{v}(t) = \hat{V}\ e^{j(\omega t + \theta_0)} = \left[\hat{V}\ e^{j\theta_0}\right] e^{j\omega t}$$

$$\underline{v}(t) = \underline{V}\ e^{j\omega t}$$

avec $\underline{V} = \hat{V}\ e^{j\theta_0}$ nombre complexe associé aux signaux sinusoïdaux $v\ (t)$ et $v'(t)$ d'amplitude $\hat{V}$ et de phase à l'origine θ_0

Forme polaire $\underline{V} = \hat{V}\ e^{j\theta_0}$

Forme rectangulaire $\underline{V} = a + j\,b$



$$\boxed{\underline{V} = \hat{V}\ e^{j\theta_0} = \hat{V}\ cos(\theta_0) + j\,\hat{V}\ sin(\theta_0) = a + j\,b}$$

Polaire ➔ Rectangulaire

$$a = \Re\left[\hat{V}\ e^{j\theta_0}\right] = \hat{V}\cos\theta_0$$

$$b = \Im\left[\hat{V}\ e^{j\theta_0}\right] = \hat{V}\sin\theta_0$$

Rectangulaire ➔ Polaire

$$\hat{V} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta_0 = atan\left(\frac{b}{a}\right) \quad si\ a \geq 0$$

$$\theta_0 = \pi + atan\left(\frac{b}{a}\right) \quad si\ a < 0$$

Retour aux grandeurs temporelles

Partant de $\underline{V} = \hat{V}\ e^{j\theta_0}$ on réintroduit le temps en formant le produit

$$\underline{v}(t) = \underline{V}\ e^{j\omega t} = \left[\hat{V}\ e^{j\theta_0}\right] e^{j\omega t} = \hat{V}\ e^{j(\omega t + \theta_0)}$$

$$\underline{v}(t) = \hat{V}\ [\cos(\omega t + \theta_0) + j\ \sin(\omega t + \theta_0)]$$

$$\boxed{v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \theta_0) = \Re\left[\hat{V}\ e^{j(\omega t + \theta_0)}\right]}$$

Calculs en complexe

Application au calcul de la somme de 2 grandeurs sinusoïdales :

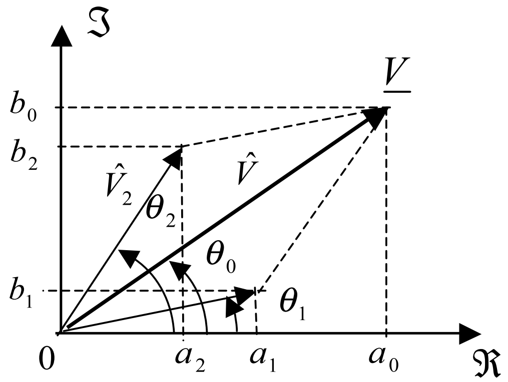
$$v_1(t)=\hat{V}_1\cos(\omega t+\theta_1) \qquad \underline{v}_1(t)=\hat{V}_1\, e^{j(\omega t+\theta_1)}$$

$$v_2(t)=\hat{V}_2\cos(\omega t+\theta_2) \quad \overset{\mathbb{C}}{\Longrightarrow} \quad \underline{v}_2(t)=\hat{V}_2\, e^{j(\omega t+\theta_2)}$$

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t) \qquad \underline{v}(t)=\underline{v}_1(t)+\underline{v}_2(t)$$

$$\underline{v}(t)=\hat{V}\, e^{j(\omega t+\theta_0)}=\hat{V}_1\, e^{j(\omega t+\theta_1)}+\hat{V}_2\, e^{j(\omega t+\theta_2)}$$

$$\left(\hat{V}\, e^{j\theta_0}\right)e^{j\omega t}=\left(\hat{V}_1\, e^{j\theta_1}+\hat{V}_2\, e^{j\theta_2}\right)e^{j\omega t}$$



$$\hat{V}\, e^{j\theta_0}=\hat{V}_1\, e^{j\theta_1}+\hat{V}_2\, e^{j\theta_2}$$

$$\underline{V}=\underline{V}_1+\underline{V}_2$$

la projection des grandeurs complexes dans $(0\ \Re\ \Im)$:

$$\hat{V}\left(\cos\left(\theta_0\right)+j\sin\left(\theta_0\right)\right)=\hat{V}_1\left(\cos\left(\theta_1\right)+j\sin\left(\theta_1\right)\right)+\hat{V}_2\left(\cos\left(\theta_2\right)+j\sin\left(\theta_2\right)\right)$$

en identifiant les parties réelle et imaginaire

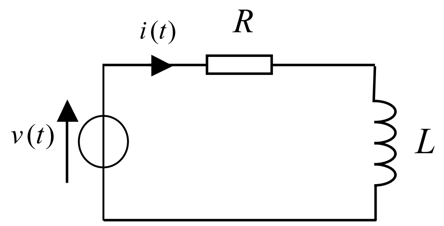
$$\left.\begin{aligned}\hat{V}\cos\left(\theta_0\right)&=\hat{V}_1\cos\left(\theta_1\right)+\hat{V}_2\cos\left(\theta_2\right)\\ \hat{V}\sin\left(\theta_0\right)&=\hat{V}_1\sin\left(\theta_1\right)+\hat{V}_2\sin\left(\theta_2\right)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \hat{V},\ \theta_0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\hat{V}=\sqrt{\hat{V}_1^2+\hat{V}_2^2+2\,\hat{V}_1\hat{V}_2\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)} \qquad \theta_0=\arctan\left(\frac{\hat{V}_1\sin\left(\theta_1\right)+\hat{V}_2\sin\left(\theta_2\right)}{\hat{V}_1\cos\left(\theta_1\right)+\hat{V}_2\cos\left(\theta_2\right)}\right)}_{\boxed{v(t)=\hat{V}\cos(\omega t+\theta_0)}}$$

On n'utilise QUE des cosinus ou QUE des sinus pour que tous les signaux aient la même origine des phases

Transformation complexe dans un circuit linéaire



Soit $v(t) = \hat{V}\ \cos(\omega t + \varphi_v)$

$i(t)$ est donné par l'équation différentielle

$$v(t) = R\, i(t) + L\ \frac{di(t)}{dt}$$

Transformation complexe ➔ ***REGIME PERMANENT SINUSOIDAL***

$$v(t) = \hat{V}\cos(\omega t + \varphi_v) = \Re\left[\hat{V}\ e^{j(\omega t + \varphi_v)}\right] = \Re\left[\underline{V}\ e^{j\omega t}\right] \qquad où \qquad \underline{V} = \hat{V}\ e^{j\ \varphi_v}$$

$$i(t) = \hat{I}\ \cos\ (\omega t + \varphi_i) = \Re\left[\hat{I}\ e^{j(\omega t + \varphi_i)}\right] = \Re\left[\underline{I}\ e^{j\omega t}\right]$$

$$\underline{V}\, e^{j\omega t} = R\,\underline{I}\ e^{j\omega t} + L\,\underline{I}\ j\omega\ e^{j\omega t}$$

$$\underline{V}\ = R\underline{I}\ + L\ j\omega \underline{I}$$

$$\underline{V}\ = \underline{Z}_R\ \underline{I} + \underline{Z}_L\ \underline{I}$$

Loi d'Ohm en **régime harmonique** $\boxed{\underline{V}\ = \underline{Z}\ \underline{I}}$ avec $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L$

(régime permanent sinusoïdal)

$$\underline{Z}\ = R + L\,\mathrm{j}\omega = Z\ e^{j\,\varphi_Z}$$

$$Z\ = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

$$\varphi_Z = Arc\tan\frac{L\omega}{R}$$

Expression de $i(t)$:

Partant de la loi d'Ohm $\underline{I} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \left[\ \hat{I}\ ;\ \varphi_I\right]$

$$\begin{cases} \hat{I} = \dfrac{\widehat{V}}{Z} = \dfrac{\widehat{V}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \\ \varphi_i = \varphi_v - \varphi_Z = \varphi_v - Arc\tan\dfrac{L\omega}{R} \end{cases}$$

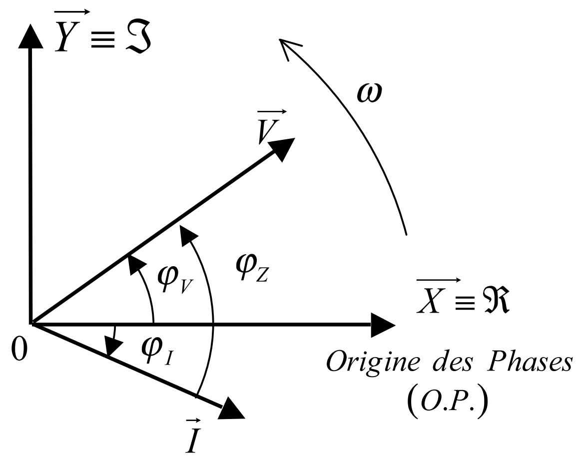
pour reconstruire la valeur instantanée du courant, on réintroduit le temps :

$$i(t) = \Re\left[\underline{I}\ e^{j\omega t}\right] \qquad où \qquad \underline{I} = \hat{I}\ e^{j\ \varphi_i}$$

$$i(t) = \Re\left[\hat{I}\ e^{j(\omega t\ +\ \varphi_i)}\right]$$

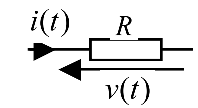
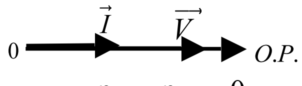
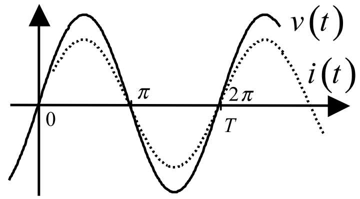
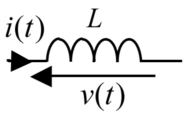
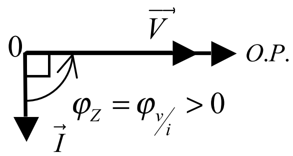
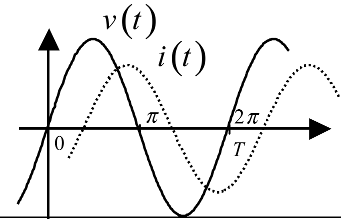
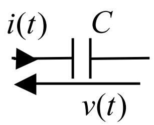
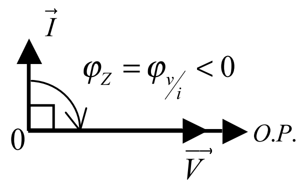
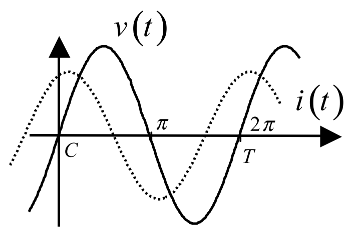
$$i(t) = \hat{I}\cos\ (\omega t + \varphi_i)$$

Dans le plan de Fresnel comme dans le plan complexe, les vecteurs sont fixes et <u>le plan tourne à</u> $\omega_{/(0\vec{x}\vec{y})}$ dans le sens trigonométrique.



Dipôles élémentaires

Loi d 'Ohm en régime harmonique $\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}$ $\quad \underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}}$ $\quad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{V}$

	$v(t) = R\, i(t)$ $\downarrow \mathbb{C}$ $\underline{V} = R\,\underline{I}$	$\underline{Z}_R = R + j0 = R\,e^{j0}$ $\underline{I} = \dfrac{\underline{V}}{R} = \hat{I}\,e^{j\varphi_i} = \left[\dfrac{\hat{V}}{R}\,;\,\varphi_v - 0\right]$	 $\varphi_Z = \varphi_{v/i} = 0$ $\varphi_v = 0$	
		Les tension et courant sont en phase dans une résistance		
	$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ $\downarrow \mathbb{C}$ $\underline{V} = L\,j\omega\,\underline{I}$	$\underline{Z}_L = 0 + j\,L\omega = L\omega\,e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\underline{I} = \dfrac{\underline{V}}{j\,L\omega} = \hat{I}\,e^{j\varphi_i} = \left[\dfrac{\hat{V}}{L\omega}\,;\,\varphi_v - \dfrac{\pi}{2}\right]$	 $\varphi_Z = \varphi_{v/i} > 0$	
		Le courant dans une inductance est en retard sur la tension		
	$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$ $\downarrow \mathbb{C}$ $\underline{I} = C\,j\omega\underline{V}$	$\underline{Y}_C = 0 + j\,C\omega = C\omega\,e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\underline{Z}_C = 0 + \dfrac{1}{j\,C\omega} = \dfrac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\underline{I} = j\,C\omega\,\underline{V} = \hat{I}\,e^{j\varphi_i} = \left[\hat{V}C\omega\,;\,\varphi_v + \dfrac{\pi}{2}\right]$	 $\varphi_Z = \varphi_{v/i} < 0$	
		Le courant dans un condensateur est en avance sur la tension		

φ_Z part toujours de $\vec{I}$ pour aller vers $\vec{V}$: angle orienté (positif dans le sens trigonométrique)

$\varphi_Z > 0$ $\quad i(t)$ est en retard sur $v(t)$ ➔ dipôle inductif

$\varphi_Z < 0$ $\quad i(t)$ est en avance sur $v(t)$ ➔ dipôle capacitif

Conclusions

Les deux outils fondamentaux dans l'étude de la composition de signaux sinusoïdaux sont :

- le calcul vectoriel dans le plan de Fresnel
- le calcul complexe

Leur utilisation comparée à celle du calcul en valeur instantanée conduit plus rapidement et plus facilement aux résultats.

En régime harmonique (régime permanent sinusoïdal) on retrouve une loi d'Ohm complexe faisant intervenir Z l'impédance complexe exprimée en Ω

Les impédances Z complexes en série s'additionnent (comme les résistances)

L'admittance Y est l'inverse de l'impédance

Les admittances complexes en parallèle s'additionnent (comme les conductances)