Lois de KIRCHHOFF Gustav Robert (1824-1887)

Kirchhoff a travaillé sur les lois de l'électrocinétique. Il a établi une méthode de résolution des problèmes dans les circuits électriques se basant sur la loi des mailles et la loi des nœuds, définissant ainsi le nombre d'inconnues à considérer dans un problème en fonction du nombre d 'équations indépendantes disponibles pour ce circuit.

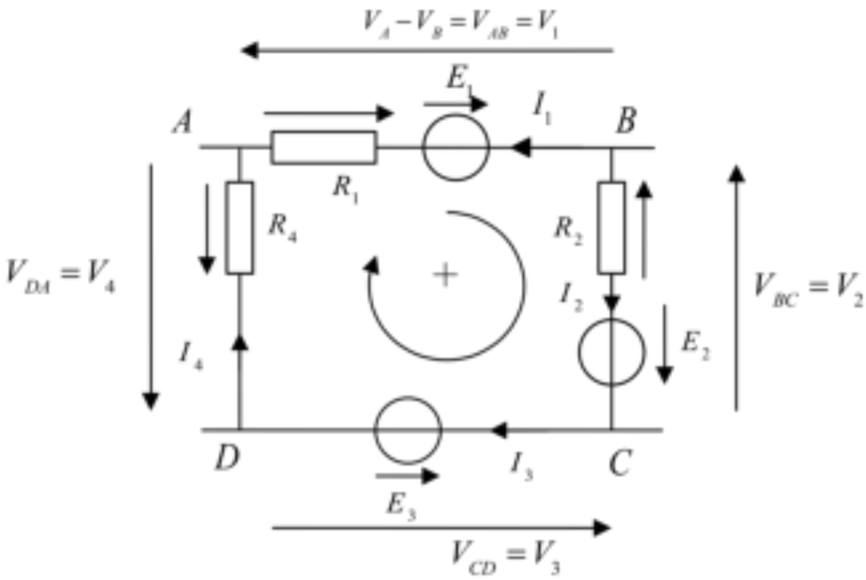
Equation de maille : définition

Somme *algébrique* (dont le signe est lié à une convention et un sens) des tensions rencontrées quand on parcourt le circuit et que, partant d'un point quelconque on revient en ce point.

Loi des mailles

Dans une maille $\sum_{\substack{k=1 \\ \text{algébrique}}}^{4} V_k = 0$

Exemple :



$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$
$$(-R_1 I_1 - E_1) + \left(R_2 I_2 - E_2\right) + E_3 + R_4 I_4 = 0$$

Loi des nœuds

Définitions :
Une branche est une partie d'un circuit parcourue par un même courant.
Un nœud est le point de rencontre de plusieurs branches

$\sum_{\substack{k=1 \\ \text{algébrique}}}^{5} I_k = 0$ ou $\sum_{\substack{k \\ i\ \text{entrants}}} I_k = \sum_{\substack{k \\ i\ \text{sortants}}} I_k$

Au nœud N :

$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$ ou $I_1 + I_3 + I_4 = I_2 + I_5$

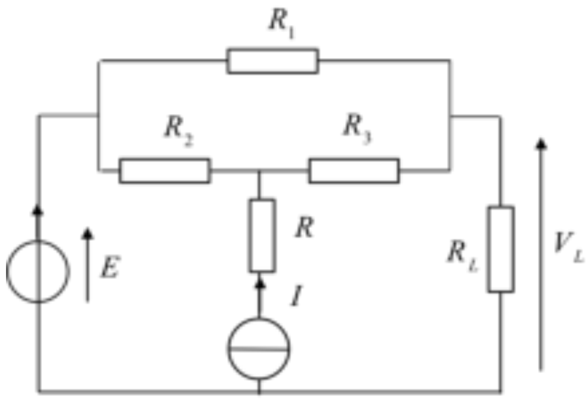
Dans la première formulation, on a considéré par convention, positifs les courants entrants et négatifs les courants sortants.

Analyser un problème

Problématique :

Dans un réseau (ou circuit) électrique donné, quelle que soit la question posée, combien d'inconnues peut-on considérer, combien d'équations indépendantes peut-on écrire pour répondre à cette question ?

Kirchhoff a établi dans sa méthode qu'un circuit à b branches donc à b courants conduisait à b équations indépendantes. Disposant alors d'un système linéaire de « b » équations indépendantes pour « b » inconnues linéairement indépendantes, il est possible de résoudre le problème.



Quelle que soit la question posée, pour extraire les bonnes équations d'un circuit, on peut arbitrairement considérer les conventions ci-après

Données (par convention):

- Grandeurs **imposées** par les sources idéales (E et I dans l'exemple ci-dessus)
- Eléments du réseau (caractéristiques des composants : résistances, etc.)

Inconnues (par convention et pour un système d'équations minimum):

- Les courants dans les branches

Remarque : la tension V_L est inconnue mais après résolution du système donc, après détermination des courants, la loi d'Ohm conduira facilement à l'expression de cette tension.

Problème : Ecrire un système de « b » équations <u>indépendantes</u> à « b » inconnues

Analyse :

- b branches = b courants inconnus
- ***n nœuds = (n - 1) équations de nœud indépendantes*** *(on vérifie facilement que la somme des n équations de nœud est toujours nulle)*
- il faudra donc trouver m = b - (n - 1) équations de maille indépendantes

Exemple 1

3 branches = 3 courants inconnus

2 nœuds (B et C) = 1 équation de nœud ind^{te}

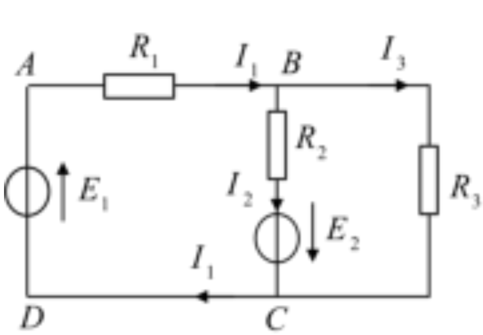
il faut 2 équations de maille indépendantes

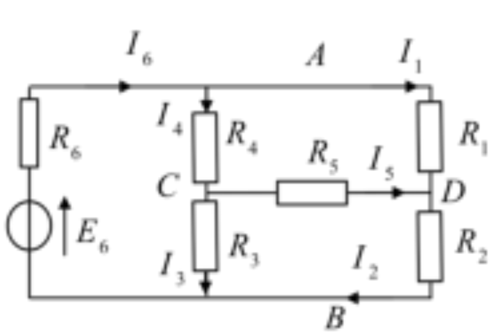
Exemple 2

6 courants inconnus

4 nœuds = 3 éq. ind^{tes}

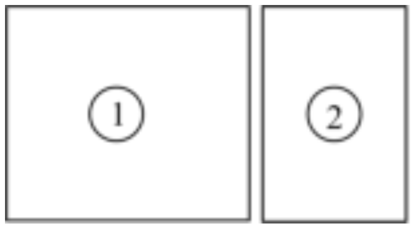
3 éq. de maille ind^{tes}

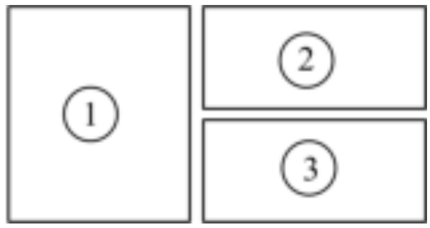




Méthode d'identification de mailles indépendantes dans un circuit :

Une solution consiste à identifier les mailles les plus courtes :





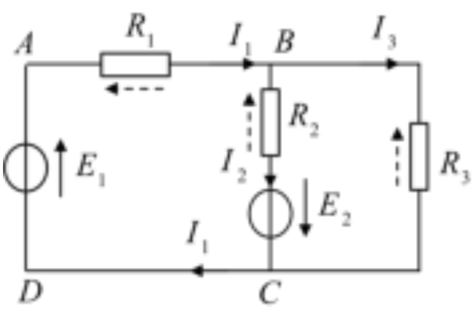
(une 3ème maille passant par E_1 R_1 et R_3 serait liée aux mailles 1 et 2 car égale à 1+2)

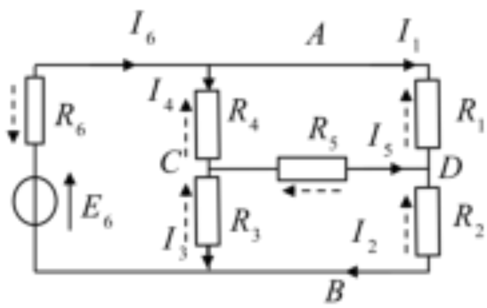
(une 4ème maille passant par R_1 R_2 R_3 et R_4 serait liée aux mailles 2 et 3 car égale à 2+3)

Pour trouver les expressions des « b » courants inconnus, on prendra par exemple les équations suivantes :

nœud : C
mailles 1 et 2
= 3 équations indépendantes

nœuds A, C, D
mailles 1, 2 et 3
= 6 équations indépendantes





$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 + E_2 = 0$$
$$-E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

$$I - I_1 - I_4 = 0$$
$$I_4 - I - I_3 = 0$$
$$I + I_1 - I_2 = 0$$
$$E_6 - R_6 I_6 - R_4 I_4 - R_3 I_3 = 0$$
$$R_4 I_4 - R_1 I_1 - R_5 I_5 = 0$$
$$R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_2 I_2 = 0$$

Remarque :
On vérifie que la 3$^{\text{ème}}$ maille de **l'exemple 1** n'est pas indépendante des deux premières :

3$^{\text{ème}}$ maille : $E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$

$$\underbrace{\left(E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 + E_2\right)}_{\text{maille 1}} + \underbrace{\left(-E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3\right)}_{\text{maille 2}} = \underbrace{E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3}_{3^{\text{ème}}\text{ maille}}$$

On en conclut que ces trois mailles sont liées par l'équations ci-dessus : elles ne sont donc pas indépendantes.

Lois de Kirchhoff

Deux circuits presque identiques et pourtant…

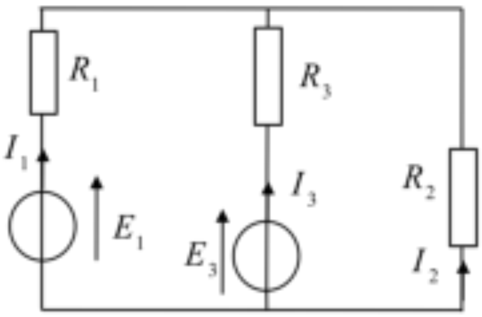


Figure a

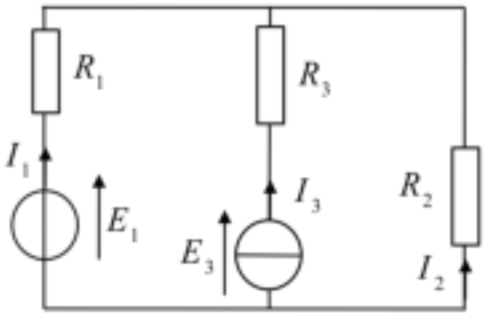


Figure b

1. Après avoir analysé les circuits des figures a et b ci-dessus (données, inconnues), poser le système d'équations minimum qui conduirait aux différents courants et tensions.
2. Donner l'expression du courant I_2 qui traverse R_2 , puis celles du courant I_3 (figure a) et de la tension E_3 (figure b).
3. Tracer la caractéristique électrique de la source de tension E_3 (figure a) – respectivement de la source de courant I_3 (figure b). Ecrire l'équation de la charge de cette source $E_3(I_3)$ (figure a) – resp. $I_3(E_3)$ pour la figure b - et tracer la droite correspondante dans le même repère que la source. En déduire le point de fonctionnement de ces sources.
4. Transformer, si nécessaire, les sources idéalisées en sources réelles. Adapter les notations et reprendre alors la mise en équation du schéma en se limitant toutefois à l'écriture du nouveau système d'équations minimum.

Correction de l'exercice

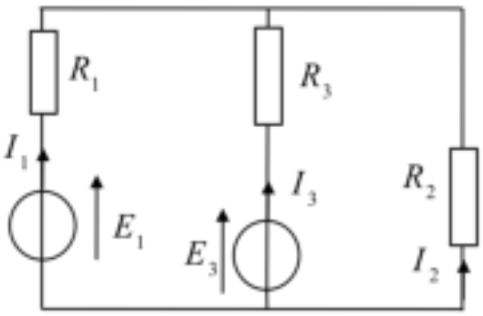


Figure a

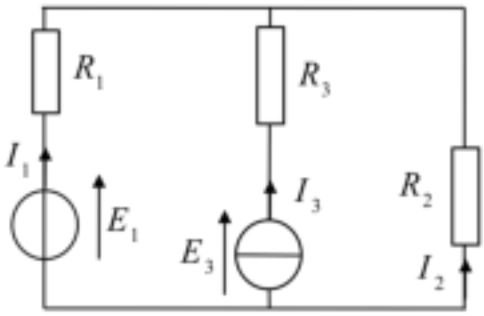


Figure b

1. Analyse du problème :

2 nœuds donc 1 seule équation de nœud possible
2 mailles indépendantes

(1) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ Nœud A

(2) $E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$ Maille 1

(3) $E_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0$ Maille 2

(cas général : figure a)		(cas particulier: figure b)
$E_1 \;\; E_3 \;\; R_i \left(i = 1,2,3\right)$	**Données**	$E_1 \;\; I_3 \;\; R_i \left(i = 1,2,3\right)$
$I_1 \;\; I_2 \;\; I_3$	**Inconnues**	$I_1 \;\; I_2 \;\; E_3$

Il faut 3 équations ind^{tes} dans les 2 cas

2. Les systèmes sont identiques mais leur résolution diffère puisque les inconnues sont différentes…on en déduira les expressions littérales de I_1 , I_2 et (I_3 ou E_3) :

$$I_1 = \frac{E_1\left(R_3 + R_2\right) - R_2 E_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} \qquad I_1 = \frac{E_1 - R_2 I_3}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = -\frac{E_1 R_3 + E_3 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \qquad I_2 = -\frac{E_1 + R_1 I_3}{R_1 + R_2}$$

$$I_3 = \frac{-E_1 R_2 + E_3\left(R_1 + R_2\right)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \qquad E_3 = \frac{\left(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1\right) I_3 + E_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Remarque : Les détails de la résolution du système d'équations dans le cas de la **figure a** sont donnés ci-dessous :

Les inconnues sont, dans le cas de la figure a, les intensités des courants $I_1 \;\; I_2 \;\; I_3$

(2) → $I_1 = \dfrac{E_1 + R_2 I_2}{R_1}$ et (3) → $I_3 = \dfrac{E_3 + R_2 I_2}{R_3}$ par substitution dans (1) :

$$\frac{E_1 + R_2 I_2}{R_1} + \frac{E_3 + R_2 I_2}{R_3} + I_2 = 0 \qquad \frac{R_3\left(E_1 + R_2 I_2\right)}{R_1 R_3} + \frac{R_1\left(E_3 + R_2 I_2\right)}{R_1 R_3} + \frac{R_1 R_3 I_2}{R_1 R_3} = 0$$

$$R_3\left(E_1+R_2I_2\right)+R_1\left(E_3+R_2I_2\right)+R_1\,R_3I_2=0$$
$$I_2\left(R_2R_3+R_1R_2+R_1\,R_3\right)+R_3E_1+R_1E_3=0$$
$$I_2=-\frac{R_3E_1+R_1E_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2}$$

La première inconnue étant déterminée, on peut reprendre les équations (2) et (3) par exemple pour en déduire les deux autres :

$$I_1=\frac{E_1}{R_1}-\frac{R_2}{R_1}\frac{R_3E_1+R_1E_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2}=\frac{E_1\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2\right)-R_3R_2E_1-R_2R_1E_3}{R_1\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2\right)}$$
$$I_1=\frac{E_1\left(R_1R_3+R_1\,R_2\right)-R_2R_1E_3}{R_1\left(R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2\right)}=\frac{E_1\left(R_3+R_2\right)-R_2E_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2}$$

de la même façon $$I_3=\frac{E_3\left(R_2+R_1\right)-R_2E_1}{R_2R_3+R_1R_3+R_1\,R_2}$$

A.N. : Avec $E_1=6{,}3\,V$ $\quad E_3=4{,}2\,V$ $\quad R_1=0{,}03\,\Omega$ $\quad R_2=6{,}00\,\Omega$ $\quad R_3=0{,}02\,\Omega$

Réponses : $I_1=42{,}32\ A$ $\quad I_3=-41{,}49\ A$ $\quad I_2=-0{,}84\ A$

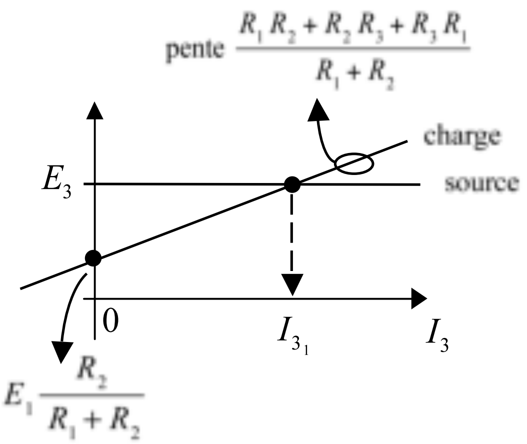
3. Caractéristiques électriques : point de fonctionnement

(cas général : figure a) (cas particulier: figure b)

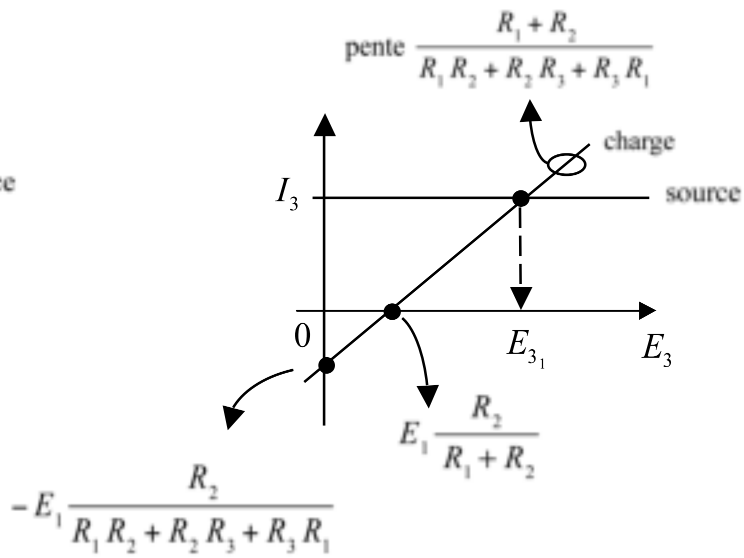
Le courant I_{31} fourni par la source E_3 … La tension E_{31} aux bornes de la source I_3 …

dépend du circuit qui l'entoure.

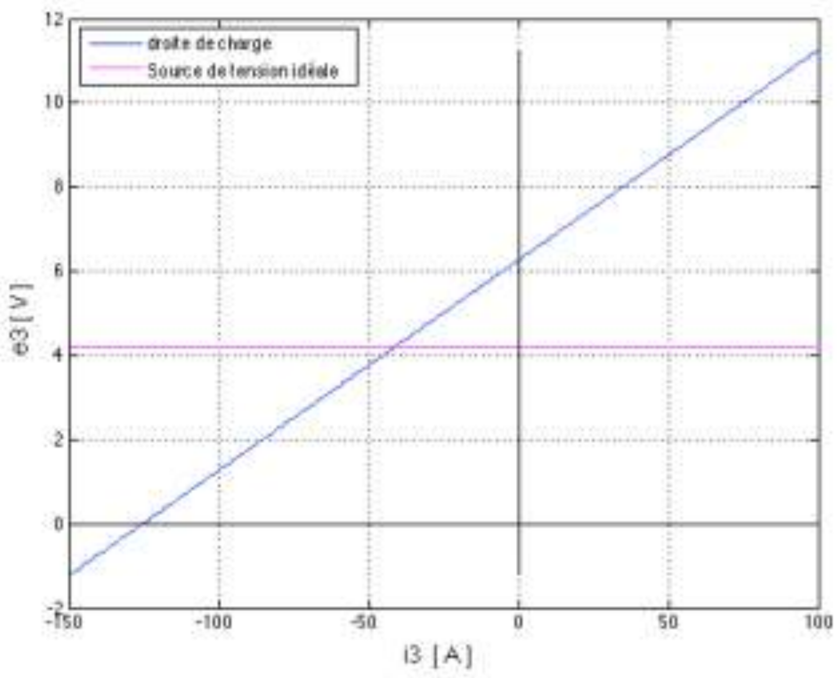
$$E_3=\frac{\left(R_1\,R_2+R_2\,R_3+R_3\,R_1\right)I_3+E_1\,R_2}{R_1+R_2}\qquad \text{Eq. de la charge}\qquad I_3=\frac{-E_1\,R_2+E_3\left(R_1+R_2\right)}{R_1\,R_2+R_2\,R_3+R_3\,R_1}$$



(figure a : $E_3\left(I_3\right)$)



(figure b : $I_3\left(E_3\right)$)



Caractéristique de la source de tension E3 tracée dans le cas de la figure a : $E_3\left(I_3\right)$

On pourra identifier les points particuliers calculés à partir des valeurs numériques précédentes :

$I_{3_1} = -41{,}49\ A$ pour une tension de source $E_3 = 4{,}2\ V$

4. Théoriquement, il est possible de considérer les résistances placées en série (resp. parallèle) avec les sources idéales de tension (resp. courant) comme des résistances internes: le comportement des associations correspondantes sera celui de sources réelles :

Pas de changement pour la figure a.

<u>Pour la figure b :</u>

Données : $E_1\ I_3\ R_1\, R_2\, R_3\, R_4$

Inconnues : $I_1\ I_2\ E_3\ I_4\ I_5$

Il faut 5 équations indépendantes :

(3 nœuds qui donnent 2 équations ind[tes] + 3 mailles indépendantes)

Nœud A : $I_1 + I_2 + I_5 = 0$

Nœud B : $-I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$

Maille 1 : $-E_1 + R_1 I_1 - R_3 I_3 + E_3 = 0$

Maille 2 : $R_4 I_4 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$

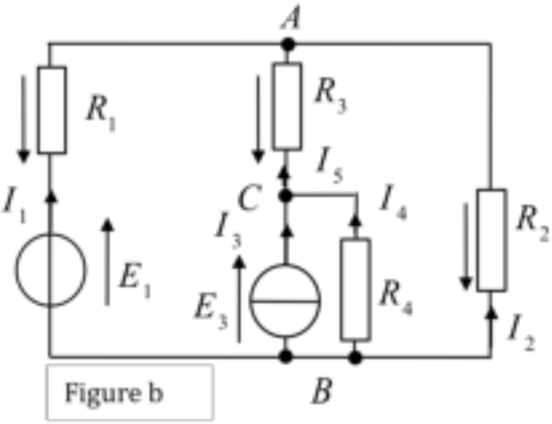


Figure b