

# La transformée de Laplace



# Table des matières

<b>I - Définition de la transformée de Laplace</b>	<b>3</b>
<b>II - Propriétés de la transformée de Laplace</b>	<b>5</b>
<b>III - Transformées de Laplace courantes</b>	<b>7</b>
<b>IV - Résolution d'équations différentielles par transformée de Laplace</b>	<b>8</b>

# Définition de la transformée de Laplace



Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

L'idée générale est de changer de variable, et de faire correspondre à la fonction **temporelle**  $f(t)$  une image de celle-ci,  $F(p)$ , uniquement valable dans le domaine **symbolique**.

## Définition

$$F(p) = \mathcal{L} [f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \times f(t) dt$$

On passe du domaine temporel (variable  $t$ ) au domaine symbolique (variable  $p$ )

## Remarque

La transformée  $F(p)$  n'existe que si l'intégrale a un sens ; il faut donc que :

- $f(t)$  soit intégrable
- lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $f(t)$  ne croisse pas plus vite qu'une exponentielle (afin de maintenir le caractère convergent de la fonction à intégrer)

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions **causales**, c'est-à-dire telles que  $f(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ . Ces fonctions  $f$  représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse, etc..

On écrit la transformée de Laplace inverse comme suit :  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)]$ .

## Notation anglo-saxonne

## Remarque

Dans les pays anglo-saxons, la variable symbolique est souvent notée  $s$ , pour *symbolic variable*. Les logiciels de simulation Scilab et Matlab utilisent cette notation.

### Point de vue complexe de la variable $p$



Si besoin (cf. analyse harmonique), on pourra considérer la variable symbolique  $p$  comme un nombre complexe (avec partie réelle et partie imaginaire) :  $p = \alpha + j\beta$

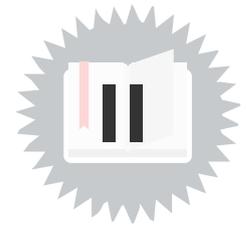
### Convention d'écriture



Par habitude, une **lettre minuscule** sera utilisée pour noter le signal dans le **domaine temporel**, et la **lettre majuscule** pour noter la **transformée de Laplace de ce signal**. Cependant, si dans un énoncé, la grandeur temporelle est déjà en majuscule, on confondra les deux écritures ; il faudra donc bien veiller à préciser la variable associée au domaine d'étude :

- $C(t)$  pour le domaine temporel
- $C(p)$  pour le domaine symbolique

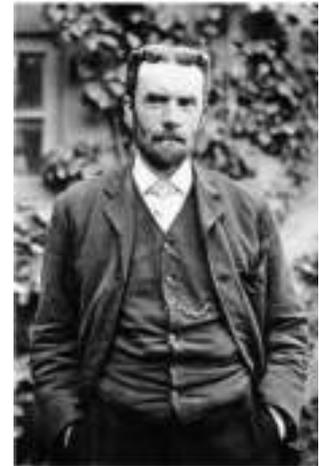
# Propriétés de la transformée de Laplace



## Conditions de Heaviside



Une fonction du temps  $f(t)$  vérifie les **conditions de Heaviside** si elle vérifie :  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ... c'est à dire si les **conditions initiales sont nulles** et le système au repos pour  $t < 0$ .



Oliver Heaviside (1850-1925)

### Unicité

A  $f(t)$  correspond  $F(p)$  unique, et vice-versa.

### Linéarité

$$\mathcal{L} [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L} [f_1(t)] + \mathcal{L} [f_2(t)]$$

$$\mathcal{L} [\lambda f(t)] = \lambda \mathcal{L} [f(t)] = \lambda F(p)$$

### Dérivation

$$\text{Dérivée première : } \mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = p F(p) - f(0^+)$$

$$\text{Dérivée seconde : } \mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$$



Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = p F(p)$  et  $\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p^2 F(p)$

**Dériver par rapport à t** dans le domaine temporel revient alors à **multiplier par p** dans le domaine symbolique.

**Intégration**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

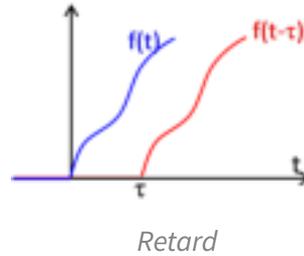


Dans les conditions de Heaviside :  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(p)}{p}$

**Intégrer dans le domaine temporel** revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique.

**Théorème du retard**

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$$



**Théorème de la valeur initiale**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

**Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

**Produit**



La transformée de Laplace d'un produit de fonctions **n'est pas** le produit des transformées ! Idem pour la transformée inverse.



# Transformées de Laplace courantes

## Distribution ("fonction") de Dirac



Fondamental

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

## Échelon



Fondamental

$$\mathcal{L}[e_0 u(t)] = \frac{e_0}{p}$$

## Rampe



Fondamental

$$\mathcal{L}[a_0 t u(t)] = \frac{a_0}{p^2}$$

## Fonction exponentielle (avec $a > 0$ )



Fondamental

$$\mathcal{L}[e^{-a t} u(t)] = \frac{1}{p + a}$$

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-a t} u(t)] = \frac{1}{(p + a)^2}$$

## Fonctions sinus et cosinus

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t) u(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) u(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

## Fonctions sinus et cosinus avec exponentielle en facteur

$$\mathcal{L}[e^{-a t} \sin(\omega t) u(t)] = \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-a t} \cos(\omega t) u(t)] = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$$



Remarque

Même si les transformées de Laplace courantes peuvent être rappelées au candidat lors des concours, il est primordial de connaître les plus courantes présentées ici **par cœur**.

# Résolution d'équations différentielles par transformée de Laplace



## Première étape : transformée de Laplace



L'équation différentielle est transformée dans le domaine symbolique : les propriétés de linéarité et de dérivation de la transformée de Laplace permettent facilement d'obtenir une équation polynomiale.

Exemple avec les conditions de Heaviside :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2u(t) \text{ donne } p^2 Y(p) + 5p Y(p) + 4Y(p) = \frac{2}{p}$$

## Deuxième étape : résolution de l'équation symbolique



La ou les équations symboliques sont résolues suivant ce qui est recherché.

Suite de l'exemple, où l'on cherche à exprimer  $y(t)$  (donc  $Y(p)$  dans un premier temps) :

$$Y(p) [p^2 + 5p + 4] = \frac{2}{p}, \text{ et } Y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 5p + 4)}$$

Malheureusement, la forme de la solution symbolique est bien souvent une fraction de polynômes qui ne correspond pas directement à une transformée d'une fonction courante.

Il est alors absolument nécessaire d'exprimer cette fraction de polynômes sous la forme de somme de termes usuels, simples. C'est la **décomposition en éléments simples**.

La propriété de linéarité de la transformée de Laplace permettra ensuite de trouver la forme temporelle pour chacun des termes sommés dans la forme symbolique.

Suite de l'exemple, où les racines du dénominateur sont 0, -4 et -1 :

$$Y(p) = \frac{2}{p(p+4)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p+1}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p Y(p) = \frac{1}{2}, B = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4) Y(p) = \frac{1}{6} \text{ et } C = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) Y(p) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Ainsi } Y(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6(p+4)} - \frac{2}{3(p+1)}$$

## Troisième étape : transformée de Laplace inverse



Il ne reste plus qu'à identifier chacun des termes de l'expression symbolique à des transformées de Laplace usuelles.

Fin de l'exemple :

$$Y(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6(p+4)} - \frac{2}{3(p+1)} \text{ donne } y(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t} \right) u(t)$$