UE12-Correction des SLAC

Table des matières

Introduction

I

1. Introduction

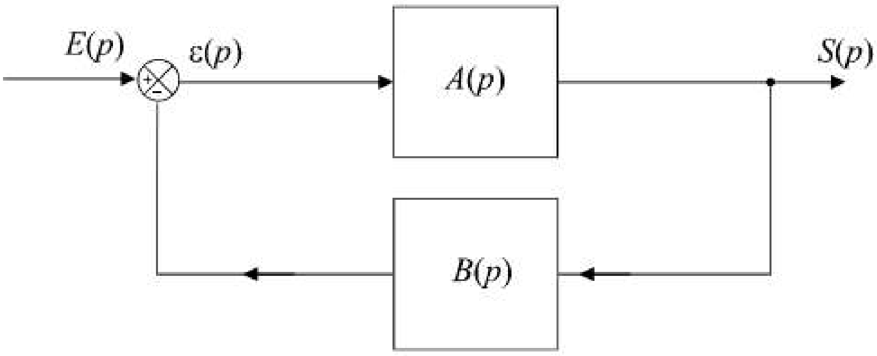
Rappel : Les 4 paramètres du cahier des charges

Dans une boucle de régulation, 4 performances peuvent être fixés :

- La précision : $\varepsilon_p < seuil$ ou encore une erreur de traînage maximale ;
- La rapidité $t_m < seuil$;
- La marge de stabilité minimale : $\Delta\varphi < seuil$;
- La limitation du dépassement : $d\% < seuil$. Il existe cependant un lien etre le dépassement et la marge de phase : $\xi_m = \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$

Dans un système, les fonctions de transfert A(p) et B(p) sont issus du système à réguler (ou à asservir) et de la mesure de la grandeur de sortie (capteur).

Il est donc difficilement possible d'en régler les performances, les paramètres n'étant pas accessibles.



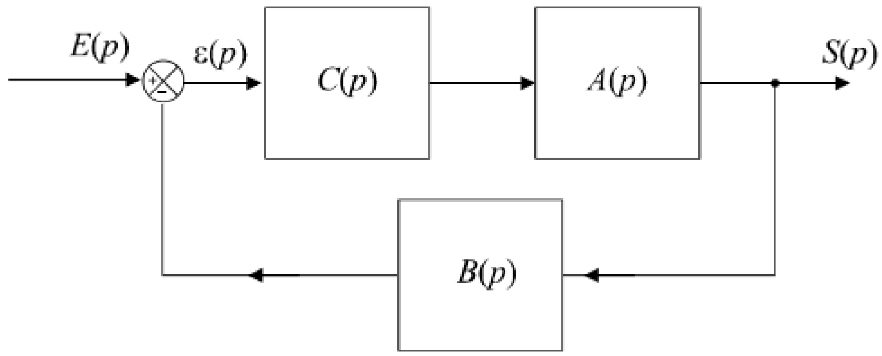
Principe

II

1. Principe de la correction d'un système

Suite au constat précédent, la solution consiste à insérer un correcteur dans la chaîne directe, comme sur la figure ci-dessous.

Ce dispositif, appelé correcteur a une fonction de transfert C(p) dont le rôle est de modifier (améliorer les performances du système).



Complément : Influence sur les FT

On passe alors des FT initiales au FT corrigées telles que ci-dessous :

$$G_i(p) = A(p).B(p) \rightarrow H_i(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

$$G_c(p) = A(p).B(p.C(p) \rightarrow H_c(p) = \frac{A(p).C(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

Remarque

Toute la difficulté va être de déterminer les bons paramètres afin d'atteindre les performances recherchées.

Les systèmes peuvent reposer sur de l'électronique très simple comme sur des systèmes très délicats à régler.

Les corrections élémentaires

III

1. Correcteur proportionnel

Fondamental : C(p) = K

Il s'agit d'un simple amplificateur. Son influence est limitée :

- Si K<1, il s'agit d'un atténuateur : la stabilité est améliorée et donc le dépassement est diminué - La rapidité et la précision sont dégradées.
- Si K>1, il améliore la rapidité et la précision mais on diminue sa stabilité et on augmente le dépassement

Remarque

Le diagramme de Bode en BO est un bon moyen de visualiser l'influence du gain statique sur les performances.

2. Le correcteur intégral

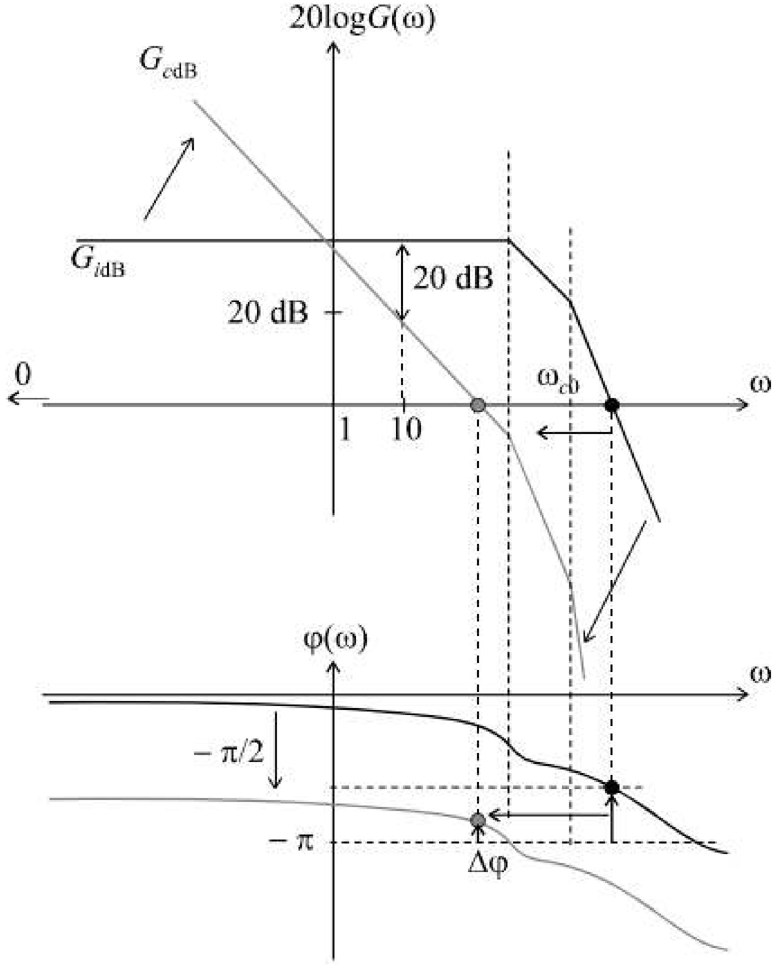
Définition : C(p) = 1/p

On ajoute un pôle nul dans la FTBO : $C(p) = \frac{1}{p}$. On sait déjà que cela entraîne une amélioration de la précision $\varepsilon_p = 0$

Influence sur les autres paramètres

- On retranche une pente de 20 dB sur l'ensemble du diagramme de gain
- On retranche $\frac{\pi}{2}$ à l'ensemble de la courbe de phase

Le diagramme ci-dessous est un exemple des modifications engendrées par l'ajout d'un correcteur à action intégrale.



Remarque

La pulsation de coupure à 0 dB ω_{c0} diminue.

$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$ donc le temps de montée augmente, l'intégrateur a donc tendance à ralentir le système.

De plus, malgré la diminution de ω_{c0}, la marge de phase aura elle aussi tendance à diminuer (on retranche 90° donc on se rapproche du point critique) ce qui dégrade la stabilité et augmente le dépassement.

Fondamental

Avec un correcteur intégral, seule la précision est améliorée. Toutes les autres performances sont dégradées.

3. le correcteur dérivé

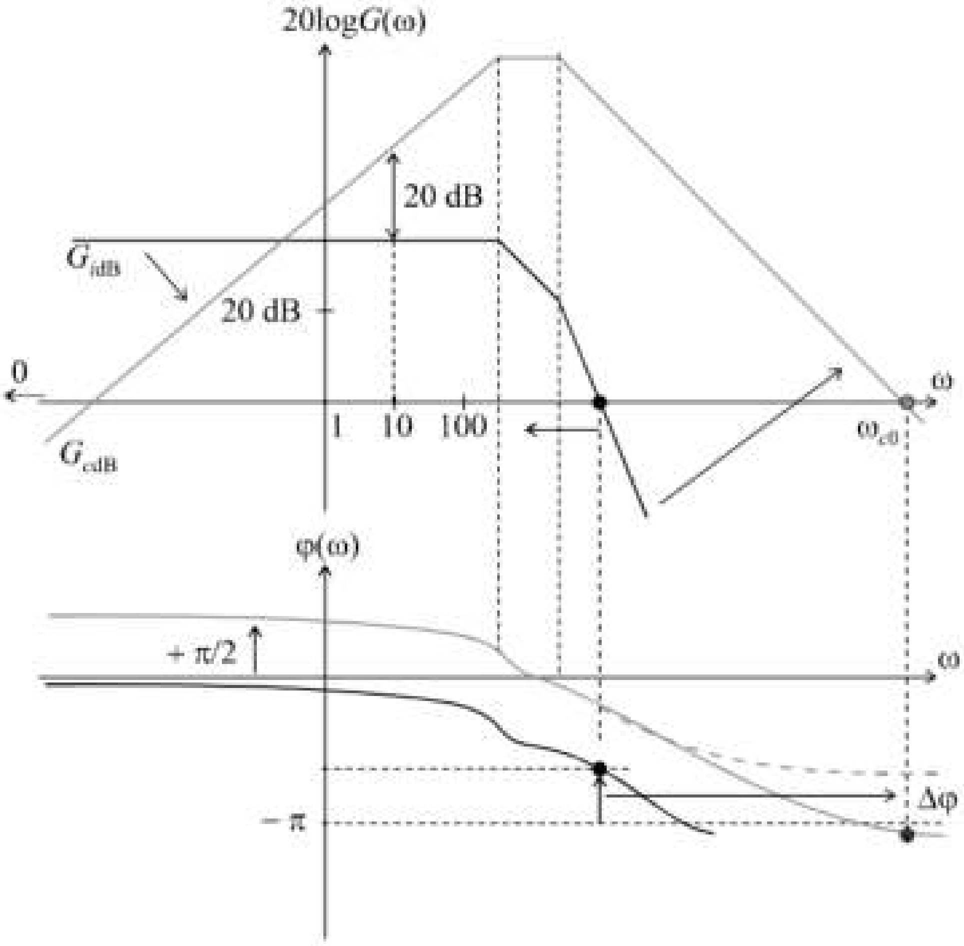
Remarque : C(p) = p

On ajoute un zéro dans la FTBO. On peut imaginer que l'action est inverse au correcteur intégral.

Complément : Influence sur les performances

On diminue de le gain en basse fréquence,ce qui a pour effet de dégrader la précision et de rejeter ω_{c0} à des fréquences plus élevées ce qui en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à l'ensemble de la courbe de phase, peut soit rendre le système instable (courbe en trait plein gris clair) soit augmenter la marge de phase (courbe en pointillé gris).

$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$, le temps de montée est donc diminué.



Fondamental

Un dérivateur a donc tendance à accélérer le système en BF.

La précision est dégradée puisque le gain chute en basse fréquence.

Les performances liées la marge de phase sont également susceptibles d'être détériorées.

Inconvénients des correcteurs élémentaires

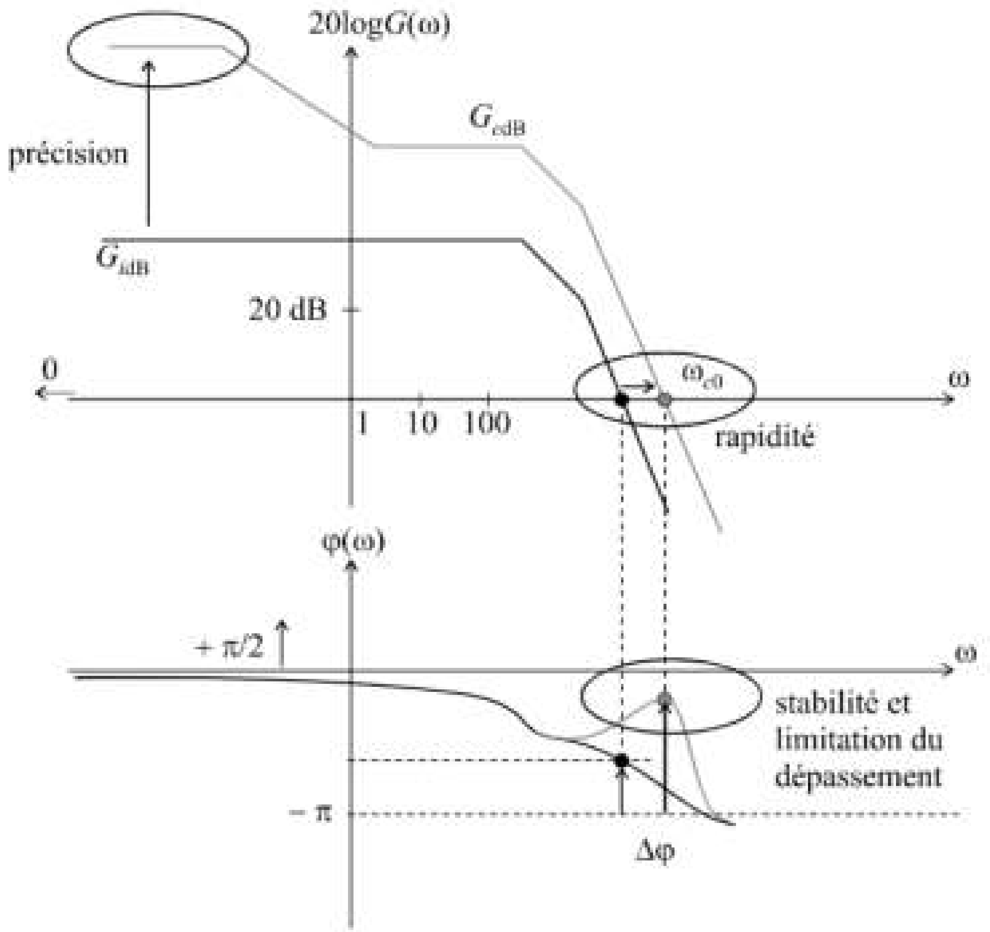
IV

1. Inconvénients des correcteurs

Remarque

On aimerait pouvoir agir indépendamment sur les différentes portions du spectre fréquentiel :

- Augmenter le gain statique en basse fréquence : améliorer la précision ;
- Augmenter la pulsation de coupure afin d'améliorer la rapidité du système ;
- Corriger la courbe de phase au voisinage de ω_{c0}



On va donc associer les différents types de correcteurs élémentaires pour construire notre diagramme corrigé.

Correcteur Proportionnel Intégral

V

1. Correcteur Proportionnel Intégral (PI) : Correcteur à retard de phase

Définition : Amélioration de la précision

$C(p) = \frac{a(1+Tp)}{(1+aTp)}$ avec a>1

Son action est limitée aux basses fréquences.

Il dispose de 2 pulsations de coupure : $\frac{1}{aT} < \frac{1}{T}$

$$C(\omega) = \frac{a\sqrt{1+T^2\omega^2}}{\sqrt{1+a^2T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = arctan\, T\omega - arctan\, aT\omega$$

Remarque : En basse fréquence

Quand $\omega \to 0$, on a : $C(\omega) \to a$

Ceci est valable jusque la pulsation $\frac{1}{aT}$

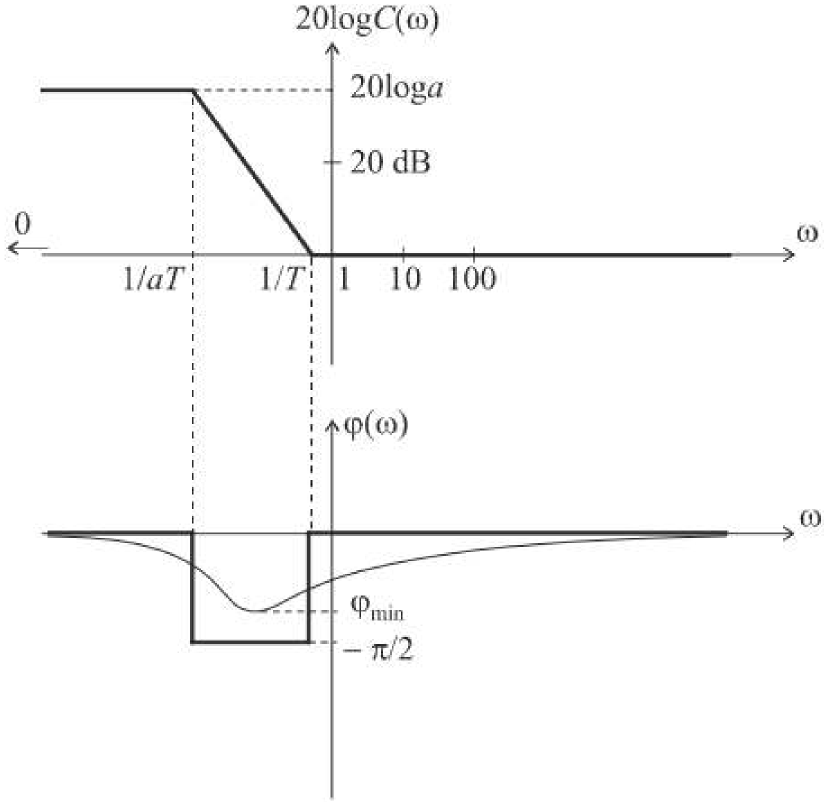
Remarque : Entre les 2 pulsations de coupure

La pente du diagramme est diminuée de 20dB entre $\frac{1}{aT}$ et $\frac{1}{T}$

Remarque : En haute fréquence

Le correcteur n'a pas d'influence.

Complément : Diagramme de Bode du correcteur



2. Exemple

Soit une FTBO placée dans une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

On souhaite que le système en BF présente :

- une erreur de position $\varepsilon_p = 5\%$
- une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$

Déterminer le réglage de K.

Détermination de la pulsation de coupure à 0dB

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^3}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3\ arctan\frac{\omega_{C0}}{10} = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_{C0} = 10\ rad/s$$

Détermination du gain K

$$G(\omega_{C0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_{C0}^2}{100}}\right)^3}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2.8 \Rightarrow 20log\ K = 8.9\ dB$$

Calcul de l'erreur de position

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K} = 0.26 = 26\%$$

3. Conclusion

Remarque

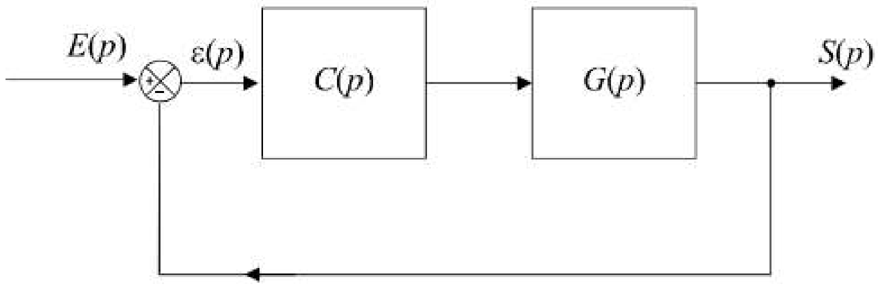
La précision ne correspond pas aux exigences du CdC. Pour obtenir une erreur de position de 5%, il aurait été nécessaire de disposer d'un gain K' tel que :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K'} = 0.05 \Rightarrow K' = 19 \Rightarrow 20log\ K' = 25.6dB.$$

4. Introduction d'un correcteur à retard de phase

Nouveau système

Soit le système corrigé ci-dessous avec $C(p) = \frac{a(1+Tp)}{1+aTp}$ avec $a > 1$



Nouvelle FTBO

$$G_c(p) = C(p).G(p) = \frac{a(1+Tp)}{1+aTp} \times \frac{2.8}{\left(1+\frac{p}{10}\right)^3}$$ avec $a > 1$

Le nouveau gain statique est alors : $K' = 2.8a$

On veut $K' = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2.8} = 6.8$.

Pour finir il faut choisir T très inférieur à la pulsation de coupure à 0 dB.

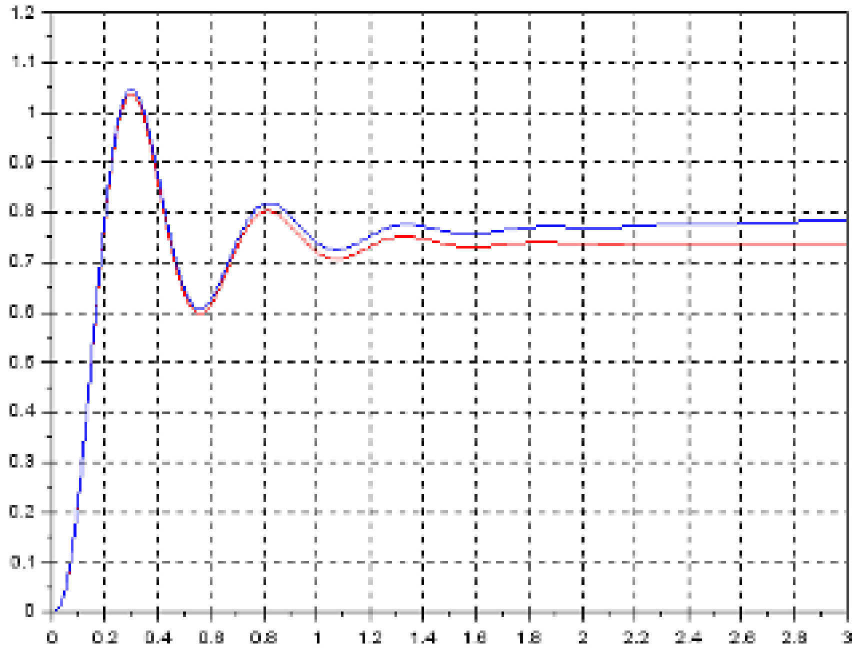
$\omega_{C0} = 10\ rad/s$ donc on choisit $T = 10\ s$

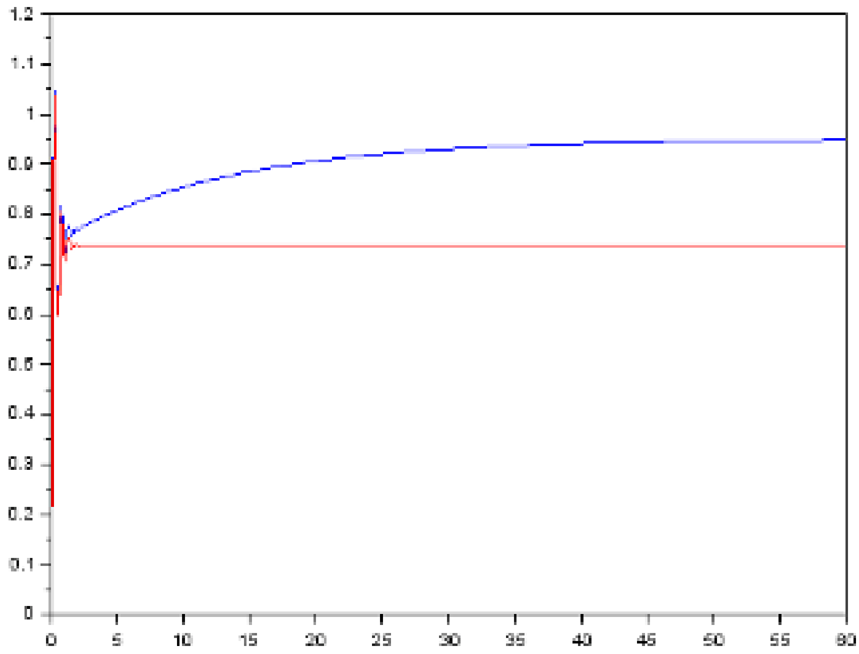
$$C(p) = \frac{6.8(1 + 10p)}{1 + 68p}$$

Complément : Réponse temporelle

De prime abord, la réponse indicielle ne change pas beaucoup entre le système non corrigé en rouge et le système corrigé en bleu. Mais le second graphe pris sur une échelle plus grande (introduction d'une constante de temps de 10s) montre :

- La réduction de l'erreur statique ;
- La présence de la constante de temps de 10s (même si le temps de montée est inchangé) ;
- La diminution du dépassement (du fait que la valeur finale a augmenté).




1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

Correcteur Proportionnel Dérivé

VI

1. Correcteur à action Proportionnelle et Dérivée - Correcteur à avance de phase

Définition : Objectif

Il s'agit d'augmenter la marge de phase d'un système en compensant un trop faible déphasage autour de la pulsation de coupure à 0 dB.

La fonction de transfert du correcteur est de la forme :

$C(p) = \dfrac{1 + aTp}{1 + Tp}$ avec $a > 1$

Complément : Module et Phase du correcteur

On notera la présence de 2 constantes de temps (donc 2 pulsations de coupure) $\dfrac{1}{aT} < \dfrac{1}{T}$

Le module du correcteur :

$$C(\omega) = \frac{\sqrt{1 + a^2T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

La phase du correcteur :

$$\varphi(\omega) = arctan\ aT\omega - arctan\ T\omega$$

Complément : Diagramme de Bode du Correcteur

$\omega \rightarrow 0, C(\omega) = 1$

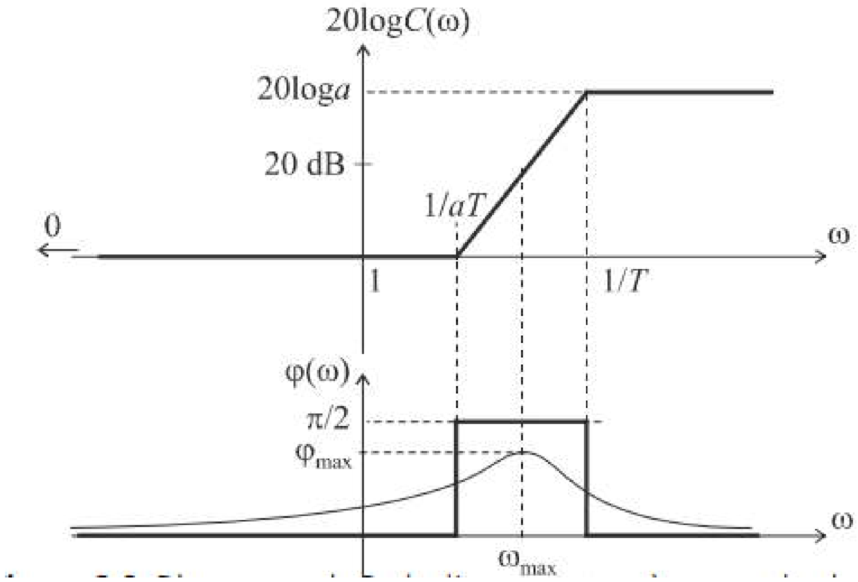
Le diagramme présente une pente nulle et un gain nul, jusqu'à la première pulsation de coupure $\dfrac{1}{aT}$

Puis la pente vaut 20dB/dec jusque la prochaine pulsation de coupure $\dfrac{1}{T}$

$\omega \rightarrow \infty, C(\omega) = 20 log\ a$

L'intérêt est surtout sur le diagramme de phase à la pulsation centrale entre les 2 constantes de temps : $\omega_{max} = \dfrac{1}{T\sqrt{a}}$

$$\varphi(\omega_{max}) = arcsin\frac{a-1}{a+1}$$



Fondamental

Il faut veiller pour ce correcteur à faire coïncider ω_{max} avec la pulsation de coupure à 0 dB du système ω_{C0}. On règle alors φ_{max} pour obtenir la marge de phase désirée.

2. Exemple

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$$

On désire une marge de phase de 45°.

Méthode : Marge de phase du système non corrigé

$$G(\omega_{C0}) = \frac{100}{1+\omega_{C0}^2} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_{C0} = \sqrt{99} = 9.95\ rad/s$$

$$\varphi = \pi - 2arctan\omega_{C0} = 0.2\ rad = 11°$$

La marge de phase est insuffisance, il faut "remonter" la phase de 34° à la pulsation ω_{C0}

Méthode : Introduction du correcteur à avance de phase

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{C0} = 9.95\ rad/s \quad \text{et} \quad \varphi_{max} = 34° = arcsin\frac{a-1}{a+1}$$

$$\arcsin\frac{a-1}{a+1} = 34° \rightarrow a = \frac{1+\sin 34°}{1-\sin 34°} = 3.54$$

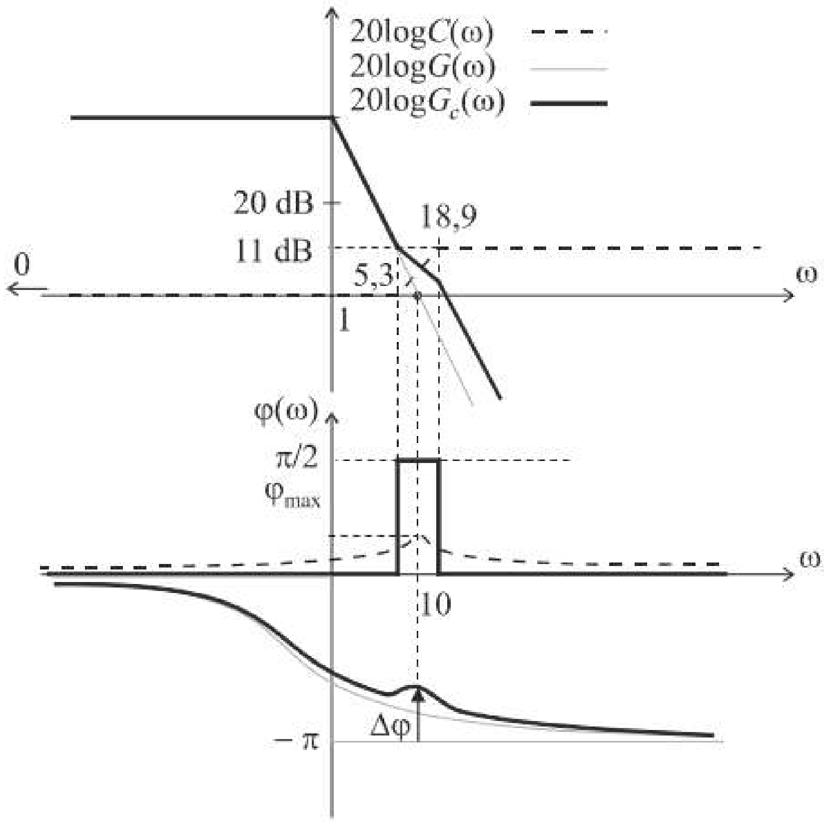
$$20\log a = 11 dB$$

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{C0} \rightarrow T = \frac{1}{9.95\sqrt{3.54}} = 0.053\ s$$

d'où le correcteur : $C(p) = \dfrac{1+0.19p}{1+0.053p}$

Complément : FTBO du système corrigé

$$G_C(p) = C(p).G(p) = \frac{1+0.19p}{1+0.053p} \times \frac{100}{(p+1)^2}$$



Remarque

Vous observerez que l'introduction du correcteur déplace sensiblement la pulsation de coupure à 0 dB. On peut soit négliger le phénomène, soit l'anticipé en majorant de 5° par exemple la remontée de phase.

3. Stratégie de correction

Le cahier des charges définit les performances que le système doit atteindre. Pour cela, il peut être nécessaire d'ajouter au système un bloc correcteur.

Méthode

1) On corrige la précision et la rapidité soit avec le gain statique, soit avec un correcteur proportionnel. Si une précision parfaite est exigée, on insère un intégrateur puis on règle la rapidité.

2) Le réglage précédent détériore la marge de phase, on ajoute un correcteur à avance de phase qui la "remonte" à la valeur voulue.

Exercices

VII

1. Exercice : Étude de la stabilité d'un système après correction intégrale

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2}$$

Question 1

Déterminer les conditions de stabilité de ce système placé dans une boucle à retour unitaire

Indice :

Calculer H(p)

Appliquer le critère de Routh

Conclure

On ajoute un intégrateur dans la chaîne directe pour annuler l'erreur statique.

Question 2

Déterminer les nouvelles conditions de stabilité.

Indice :

La méthode est la même que précédemment.

2. Exercice : Correction de la rapidité d'un système

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+4)}$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire associé à un correcteur proportionnel C(p) de gain K.

Question 1

Calculer la valeur de K qui assure une marge de gain égale à 45°.

Question 2

Calculer le [illegible] en BF.

Question 3

Déterminer la valeur de K qui assure un temps de montée de 0.2s.

Question 4

Calculer la nouvelle marge de gain et conclure.

3. Exercice : Correction de la stabilité après réglage de la rapidité

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)^3}$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite avoir une marge de phase de 45° et un temps de montée inférieur à 0.5s.

Question 1

Calculer la valeur de K qui permet d'obtenir en BF, un temps de montée de 2.15s.

Indice :

On sait dans un exercice précédent que le système est stable si K<8.

Question 2

Calculer, pour le K précédent, la marge de phase.

Question 3

En déduire la FT du correcteur à avance de phase à introduire dans la chaîne directe.

4. Exercice : Correction de la précision d'un système par un correcteur à retard de phase

Soit la FTBO suivant, placée dans une boucle à retour unitaire.

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^3}$$

Question 1

Déterminer la valeur de K pour obtenir un dépassement limité à 10%.

Indice :

1) On applique la relation approché liant marge de phase et ξ_{BF}

2) On détermine la pulsation $\omega_{0\,dB}$

3) On calcule le gain K pour obtenir G = 1 à la pulsation $\omega_{0\,dB}$

Question 2

Calculer l'erreur de position en BF.

Indice :

1) On détermine la FTBF

2) On applique la formule de calcul de l'erreur de position

Question 3

Déterminer l'expression C(p) du correcteur à retard de phase à introduire dans la chaîne directe pour avoir la limitation du dépassement en maintenant une erreur statique de 20%.

5. Exercice : Réglage d'un système en stabilité et en précision

On souhaite asservir un système dont la fonction de transfert est :

$$A(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$$

Ce système est placé dans une boucle de régulation avec un correcteur C(p) = K.

La chaîne de retour est composée d'une fonction de transfert B(p) = 3.

Question 1

Déterminer la condition sur K pour avoir une marge de phase supérieure à 45°.

Question 2

Déterminer l'expression du nouveau correcteur C(p) qui permet en plus de la marge de phase de 45°, d'obtenir une erreur de position inférieure à 0.2.

6. Exercice : Correction d'un système conformément à un cahier des charges

On place le système suivant dans une boucle à retour unitaire, telle que :

$$G(p) = \frac{K}{(10p + 1)^2(p - 1)}$$

- $\Delta\varphi > 45°$
- $d \leq 10\%$
- $\varepsilon_p < 0.08$
- $t_m < 8\ s$

Question 1

Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_p < 0.08$?

Indice :

1) Calculer H(p)

2) Calculer $\lim_{p \to 0} [1 - H(p)]$

3) Calculer K pour avoir $\varepsilon_p < 0.08$

Question 2

Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8\ s$?

Indice :

On utilise la formule : $t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$

On choisit maintenant la plus petite valeur de K permettant de satisfaire les 2 conditions précédentes.

Question 3

Calculer la marge de phase obtenue et en déduire le dépassement.

Indice :

Pour garantir les 2 conditions, il faut **K > 16.1**.

En conservant cette valeur de K, on ajoute un correcteur C(p) pour corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer la rapidité ou la précision définies par le CdC.

Question 4

Déterminer précisément, la fonction de transfert du correcteur.

7. Exercice : Régulation d'un four en fonction d'un cahier des charges

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension v(t). Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de 1 200 ◦C (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse 1 400 ◦C).

Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention.

Le four est régi par l'équation différentielle : $\frac{d\theta}{dt} + 2000\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.02v(t)$

Question 1

1. Calculer la fonction de transfert G(p) du four en boucle ouverte.
2. Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

Question 2

En admettant malgré tout qu'on alimente le four en boucle ouverte en appliquant aux bornes de la résistance une tension de 100 V continue, au bout de quelle durée atteindrait-on, dans le four, une température de 1 200 ◦C ?

On décide de réguler la température dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension u(t).

Le capteur est régi par l'équation différentielle : $u(t) + 2\frac{du}{dt} = 5.10^{-3}\theta(t)$.

On introduit également un gain K dans la chaîne directe

Question 3

1. Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée.
2. Déterminer les conditions de stabilité de ce système.

On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$

Question 4

Quelle est, dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

Indice :

1) Calcul de la FTBO

2) Calcul de ω_{C0}

3) Calcul du temps de montée $t_m = \dfrac{3}{\omega_{C0}}$

Question 5

On souhaite évidemment réguler la température du four à 1 200 ◦C.

1. Déterminer l'expression du signal de consigne à introduire dans le système.
2. Le système étant réglé pour obtenir une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$, quelle est la température maximale que l'on atteint dans le four ?
3. Conclure.

Question 6

1. En voulant limiter le dépassement à 10 %, quel sera le temps de montée en température du four ?
2. Combien peut on traiter d'objets en 24 heures ?

Question 7

On souhaite atteindre une cadence de traitement de 100 objets par 24 heures.

1. Sur quelle valeur faut-il régler le gain K pour atteindre cet objectif ?
2. Que vaut alors la marge de phase ?
3. Quel correcteur faut-il ajouter à la chaîne directe pour limiter le dépassement à 10 % tout en conservant cette cadence ?

Indice :

Pour atteindre 100 objets par 24h, sachant que l'on réalise les objets par 10

24h/jour = 60x24 = 1440 mn/jour

1440 / 10 = 144 mn = 2h24mn

Le temps de cuisson (1h) et le temps de refroidissement (24 mn) sont incompressibles donc : $t_m = 1h$