Stabilité des systèmes linéaires asservis

Table des matières

Partie 1 : Critère mathématique de stabilité

I

1. Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée.

La sortie doit donc converger vers une valeur finie sans qu'aucun signal dans le boucle n'oscille ou ne tende vers l'infini.

Remarque

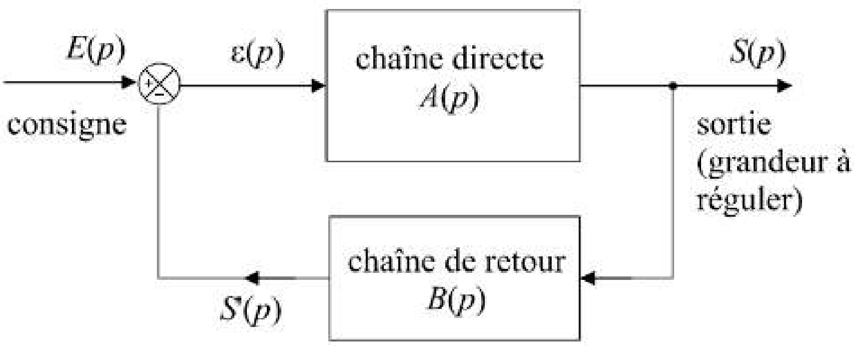
La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

Fondamental : La condition mathématique de stabilité

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

2. Démonstration rapide

Soit un système défini par sa fonction de transfert en boucle fermée : $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$



Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de 2 polynômes en p, factorisables dans l'ensemble des complexes.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha.\prod_{j=1}^{m}(p - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)}$$

où p_i sont les n pôles de H(p) et z_j sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Stimulation du système

On applique maintenant un échelon unitaire à l'entrée du système, le signal de sortie devient :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha.\prod_{j=1}^{m}(p - z_j)}{p.\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)}$$

La décomposition en éléments simples de cette fraction fait apparaître des pôles réels r_i et des pôles complexes $\tau_k + j\omega_k$

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)}$$

La transformée inverse de S(p) est alors :

$$s(t) = a.u(t) + \sum_i b_i.e^{r_i.t} + \sum_k b_k.e^{(\tau_k + j\omega_k).t}$$

Fondamental : Conclusion 1

Cette équation montre que la stabilité est obtenue si les r_i (pôles réels) sont négatifs (convergence de la fonction exponentielle).

Termes complexes

$$b_k.e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k.e^{\tau_k.t}.e^{j\omega_k.t}$$

Ce terme peut se mettre sous la forme : $e^{\tau_k.t}(A_k.cos(\omega_k.t + B_k.sin(\omega_k.t))$

Fondamental : Conclusion 2

La encore, le signal converge si τ_k est négatif. (C'est-à-dire la partie réelle des pôles est négatives).

Attention : Stabilité

La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

3. Inconvénients du critère mathématique

Avantage

Le critère mathématique est inconditionnel et universel.

Inconvénients

- Nécessite de connaître la fonction de transfert, de pouvoir en calculer les pôles ce qui devient complexes avec des ordres élevés ou avec de nombreux paramètres ;
- La fonction de transfert n'est qu'un modèle approximatif et ne peut pas garantir la stabilité du système réel ;
- Les systèmes évoluant dans le temps, un système peut devenir instable par usure de ses éléments ou de variations de l'environnement.

Méthode : Les critères de stabilité

Plutôt que d'utiliser ce critère très "binaire" (stable ou instable), on va préférer en utiliser d'autres qui introduisent la notion de marge de stabilité et qui permet de définir avec plus de nuances si un système est plus ou moins stable.

Critère algébrique de Routh

II

1. Principe

Le critère de Routh ne permet pas de définir la notion de marge de stabilité, il est néanmoins particulièrement adapté au diagnostic de stabilité pour les systèmes d'ordre élevés.

Soit H(p) la fonction de transfert en boucle fermée et D(p) son dénominateur un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + a_{n-2}.p^{n-2} + \dots + a_1.p + a_0$$

Méthode

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients ai dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux.

On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
\dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \cdots & \dfrac{a_{n-1}a_1 - a_n a_0}{a_{n-1}} & \cdots
\end{array}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0
\end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
\dfrac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & \dfrac{b_m a_{n-5} - a_{n-1} b_{m-2}}{b_m} & \cdots & &
\end{array}
$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne.

Définition : Énoncé du critère algébrique de Routh

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert H(p) est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

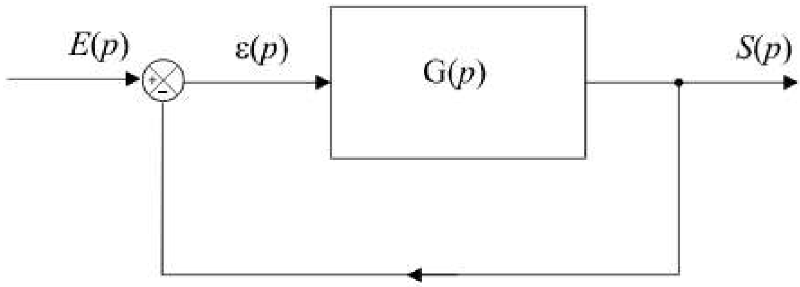
Remarque : Nombre de lignes

Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynômes D(p), autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

2. Application du critère de Routh

Exemple : Fonction de Transfert du système

Soit $G(p) = \dfrac{K}{p(p^2 - p + 3)}$ un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.



On montre que la FTBF est alors :

$$H(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}$$

$$D(p) = p^3 + p^2 + 3p + K$$

L'application du critère de Routh aboutit au tableau suivant :

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & K \\ 3-K & 0 \\ K & 0 \end{array}$$

Conclusion :

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que $3 - K > 0$.

Le système est donc stable si K < 3.

Critère de Nyquist

III

Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte.

Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliqué à la fonction de transfert d'un système asservi.

1. Théorème de Cauchy

Méthode

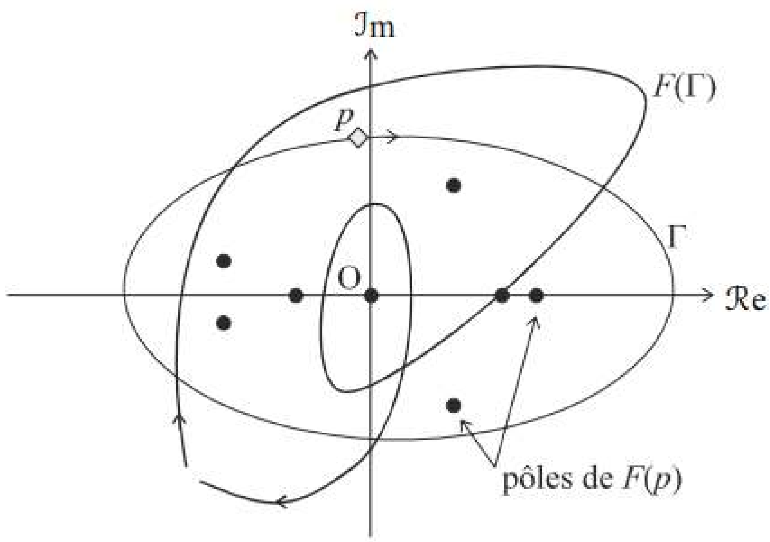
Soit une fonction complexe d'une variable complexe F(p) possédant n pôles et m zéros.

On considère, dans le plan complexe, un contour fermé Γ de telle sorte que tous les pôles et tous les zéros de la fonction F(p) se trouvent à l'intérieur de ce contour.

Lorsque p se déplace le long du contour Γ, son image par F se déplace le long d'une courbe que nous pouvons appeler F(Γ).

Le nombre de tours effectué par F(Γ) autour de l'origine est égal à m – n.

La différence m – n est comptée positivement si le sens de rotation de p le long de Γ coïncide avec le sens de rotation de F(Γ) autour de O et négativement dans le cas contraire.



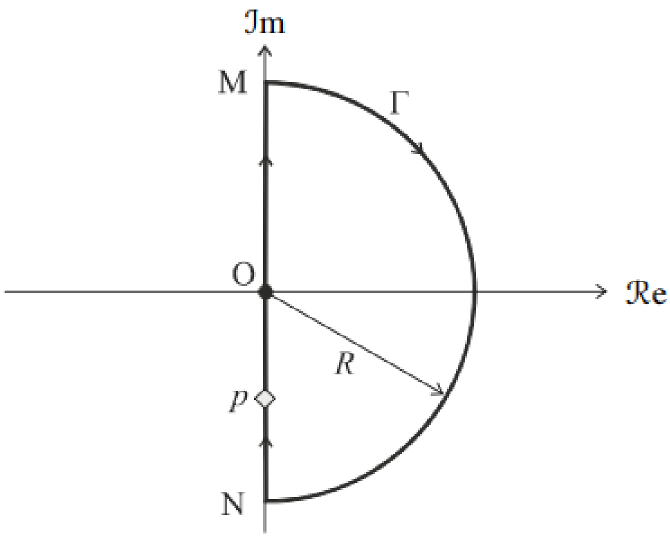
2. Contour de Nyquist

On définit le contour de Nyquist par la courbe Γ définie par le demi-périmètre d'un cercle de rayon R et de centre O lorsque R → ∞, du côté des parties réelles positives.

Ce contour est donc formé de l'axe des imaginaires (p = jω) pour ω variant de $-\infty$ à $+\infty$ et d'un arc de cercle de rayon infini qui le referme.

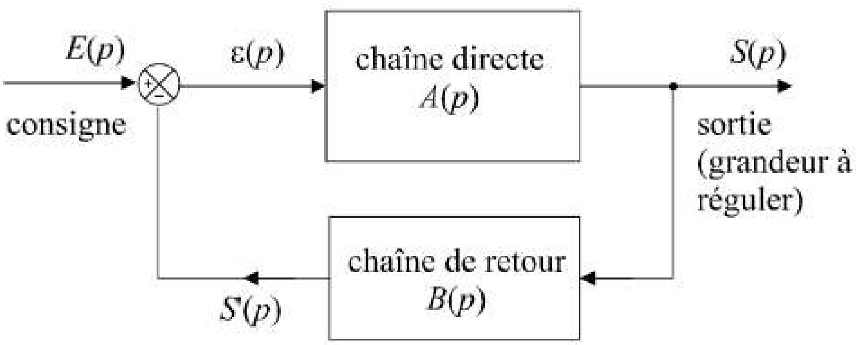
Il contient donc tout le demi-plan correspondant aux parties réelles positives.

On l'oriente arbitrairement dans le sens horaire. Cela signifie que l'on supposera, dans l'application du théorème de Cauchy, que p décrit le contour G dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous.



3. Application du théorème de Cauchy à l'étude de la stabilité

Méthode : Soit le système ci-dessous :



Ce système est stable en boucle fermée si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée :

$H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$ ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

L'étude de la stabilité découle donc des solutions de l'équation :

1 + A(p).B(p) = 0

1 + G(p) = 0

Remarque : L'idée e Nyquist

Déduire le fonction de transfert en BO, la stabilité du système en BF.

On applique le théorème de Cauchy à la fonction F(p) = G(p) + 1.

Le système est stable si aucun pôle de H(p) n'est à partie réelle positive cela se traduit par le système est stable si aucun zéro de F(p) ne se trouve à l'intérieur du contour de Nyquist.

Fondamental : Critère de Nyquist

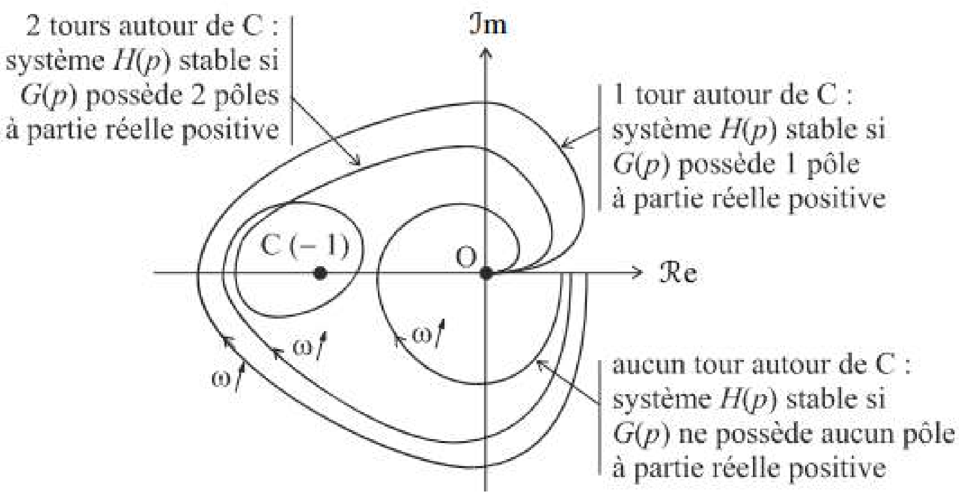
Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction F(p) = G(p)+1 fait autour de l'origine, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à −n où n est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte G(p). L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par l'origine.

4. Deuxième énoncé du critère de Nyquist

Définition

Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction G(p) fait autour du point critique (-1,0), dans le sens horaire, un nombre de tours égal à −n où n est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte G(p).

L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par le point critique.



5. Application du critère de Nyquist

Exemple : Soit le système , défini par la FTBO ci-dessous placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.

$$G(p) = \frac{K}{(p-1)(p+10)^2}$$

- pôles du systèmes : 1 et -10 (pôle double)

Le système G(p) possède donc un pôle à partie réelle positive.

FTBF : $H(p) = \dfrac{K}{(p-1)(p^2+20p+100)+K}$

L'application du critère de Routh nous donne :

$$D(p) = (p-1)(p^2+20p+100)+K = p^3+19p^2+120p+(K-100)$$

Soit le tableau suivant :

1	120
19	$K-100$
$\dfrac{2380-K}{19}$	0
$K-100$	0

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne.

Le système est donc stable si 100 < K < 2380.

Méthode : Étude fréquentielle

Calcul du module de G :

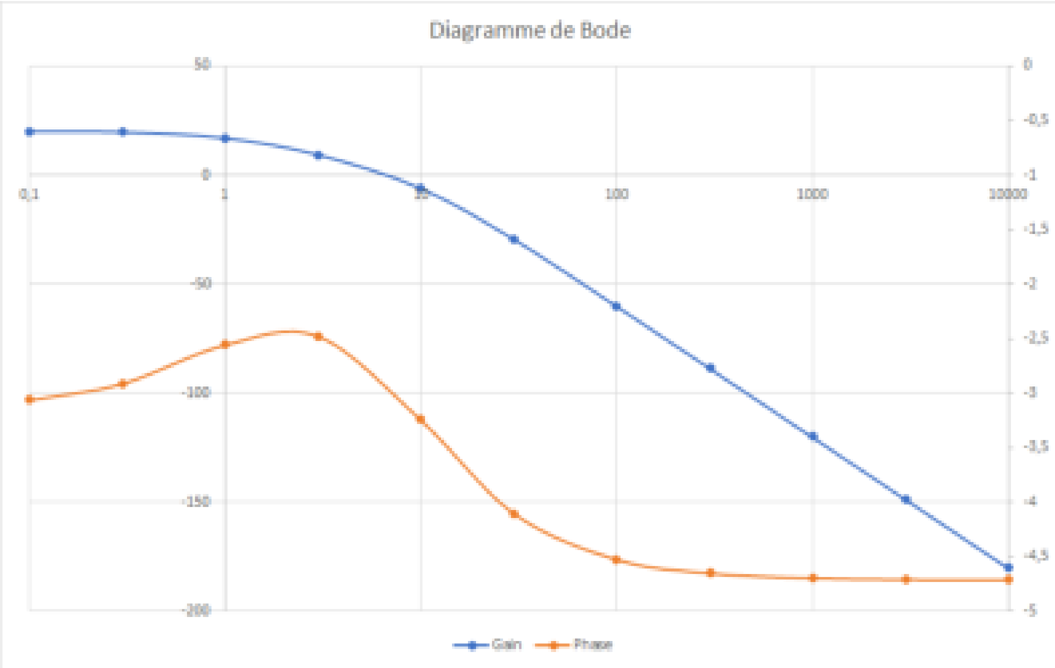
$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)}(\omega^2+100)}$$

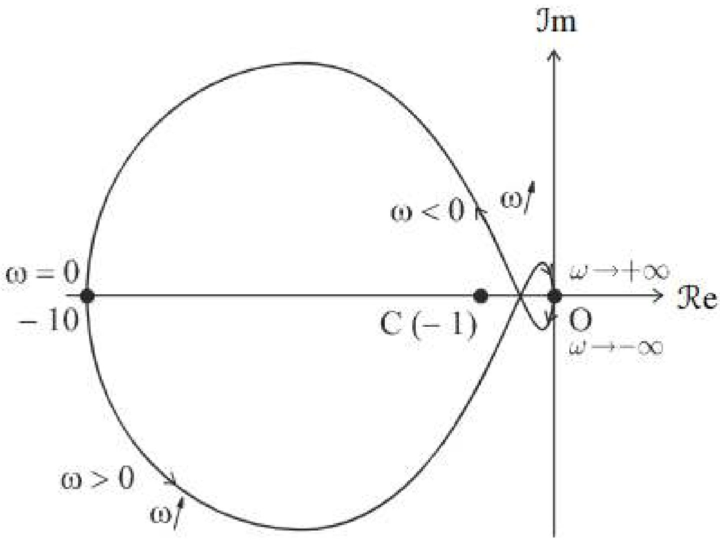
Calcul de l'argument de G :

$$\varphi(\omega) = 0 - arg(-1+j\omega) - 2.arg(j\omega+10);$$

$$\varphi(\omega) = -\pi + arctan\omega - 2arctan\frac{\omega}{10}$$

On choisit pour la suite K = 1000 (valeur qui correspond à la stabilité d'après le critère de Routh).





Parcourons l'image par G(p) du contour de Nyquist dans le sens des ω croissants : nous sommes dans le sens anti-horaire.

Cette image fait un seul tour autour du point critique ; le système est donc bien stable étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte possède un seul pôle à partie réelle positive.

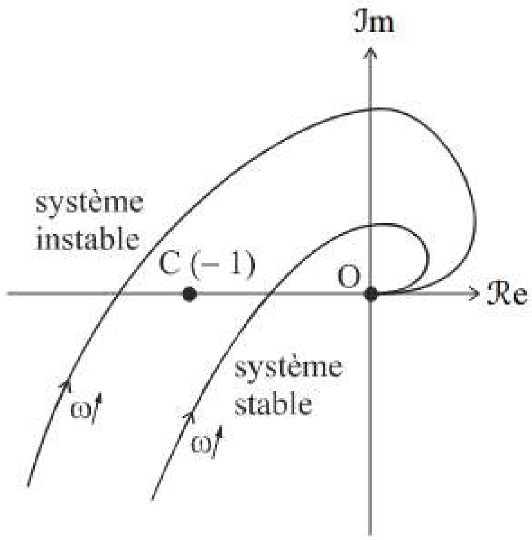
Critère du revers

IV

1. Énoncé

Définition

Si la fonction de transfert en boucle ouverte G(p) d'un système asservi ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants, on laisse toujours le point critique C à gauche de la courbe.



Attention : Remarque

Ne jamais perdre de vue que l'on trace toujours le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte pour étudier sa stabilité en boucle fermée.

Marges de stabilité

V

1. Concept de marge de stabilité

Si les critères permettent de diagnostiquer si un système est stable ou instable, certains critères permettent d'appréhender la notion de marge de stabilité.

Ainsi, le critère de Routh qui nous indique dans l'exemple que pour k <3, le système est stable, on se doute que le système sera d'autant plus stable que l'on sera loin de la limite préférant ainsi K = 2 plutôt que 2.99.

De même, que plus on passera loin du point critique plus le système sera stable.

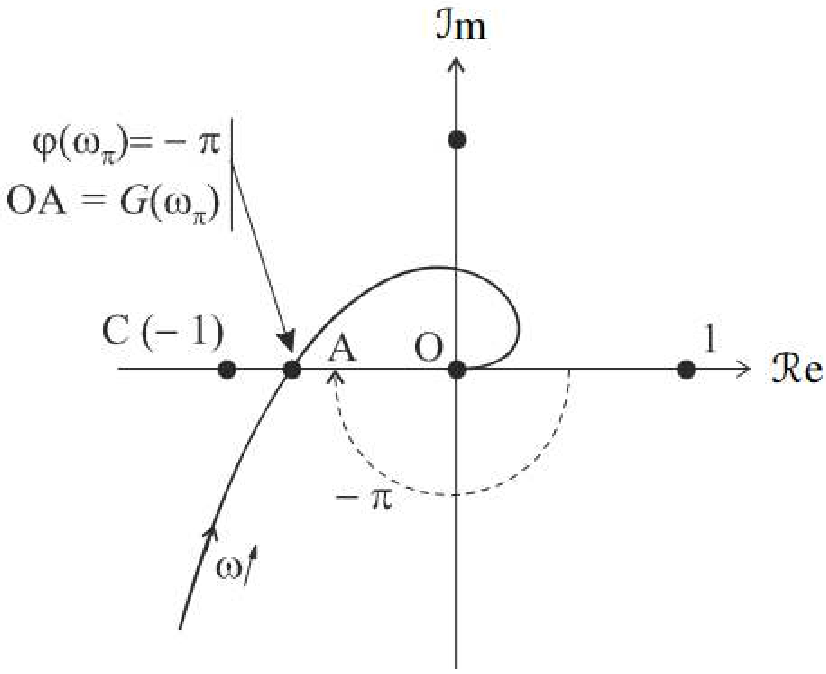
Dans la suite, nous allons définir plus précisément les notions de marge de gain et marge de phase.

2. Marge de gain

Définition

Dans le diagramme de Nyquist d'un système de fonction de transfert en boucle ouverte, qui ne possède que des pôles à partie réelle négatives, nous pouvons appliquer le critère du revers.

En vertu de ce critère, le système est stable si et seulement si son lieu de Nyquist en BO laisse le point critique sur sa gauche quand il est parcourue dans le sens des ω croissants.



Le système sera alors d'autant plus stable que la courbe passera loin du point critique.

Plus la distance CA est importante, plus le système est stable.

Cependant, on utilisera la distance OA :

- $G(w_\pi) = OA$
- $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$

Fondamental : La marge de gain

$\Delta G = -20 * log(OA) = -20 * log(G(\omega_\pi))$

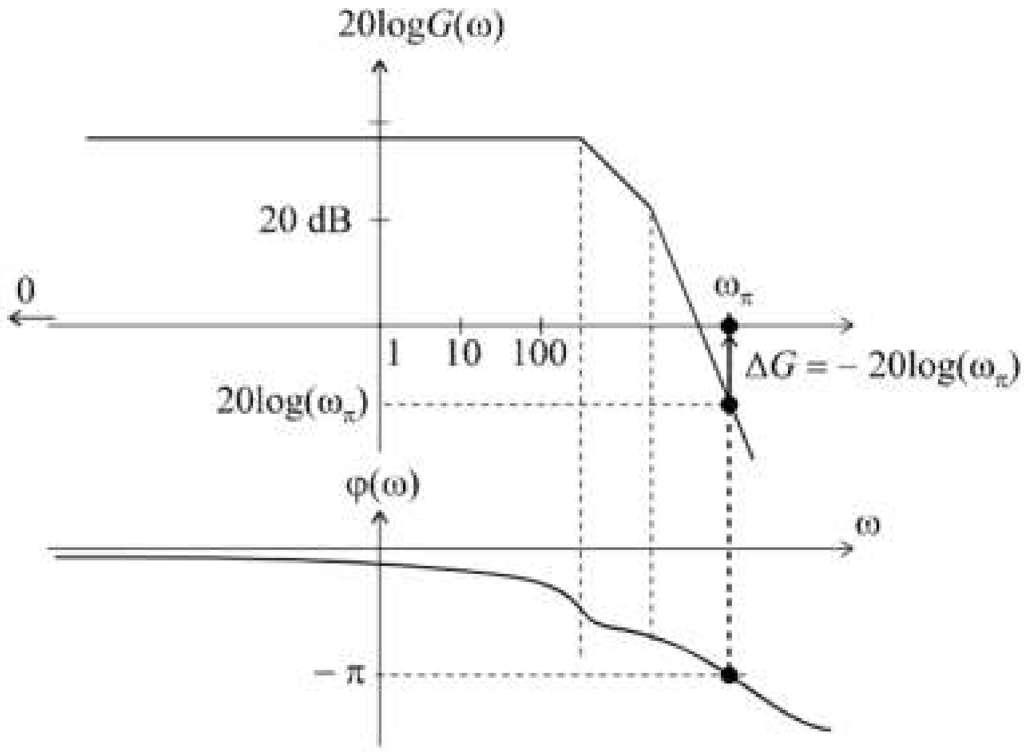
Cette définition permet de définir une marge de gain en dB d'autant plus importante que le système est stable.

Complément : Marge de gain et Diagramme de Bode

Il est possible de localiser la mesure de la marge de gain sur le diagramme de Bode.

Il suffit de repérer, grâce au diagramme de phase, la pulsation correspondant au déphasage égal à $-\pi$,

puis, dans le diagramme de gain, à cette pulsation, de mesurer ΔG, directement en décibels.



3. Exemple de calcul de la marge de gain

Exemple : Soit G(p), la FTBO d'un système.

$$G(p) = \frac{5}{(\frac{p}{100} + 1)^3}$$

Méthode

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_π, puis à calculer $\Delta G = -20 log G(\omega_\pi)$.

ω_π est telle que : $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$

Exemple

On a $G(j\omega) = \dfrac{5}{(j\dfrac{\omega}{100}+1)^3}$

donc $\varphi(\omega) = argG(j\omega) = 0 - 3arctan\dfrac{\omega}{100}$

$\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow 3arctan\dfrac{\omega_\pi}{100} = \pi \Rightarrow \omega_\pi = 100tan(\dfrac{\pi}{3}) = 100\sqrt{3}$

On a alors $\Delta G = -20LogG(100\sqrt{3})$

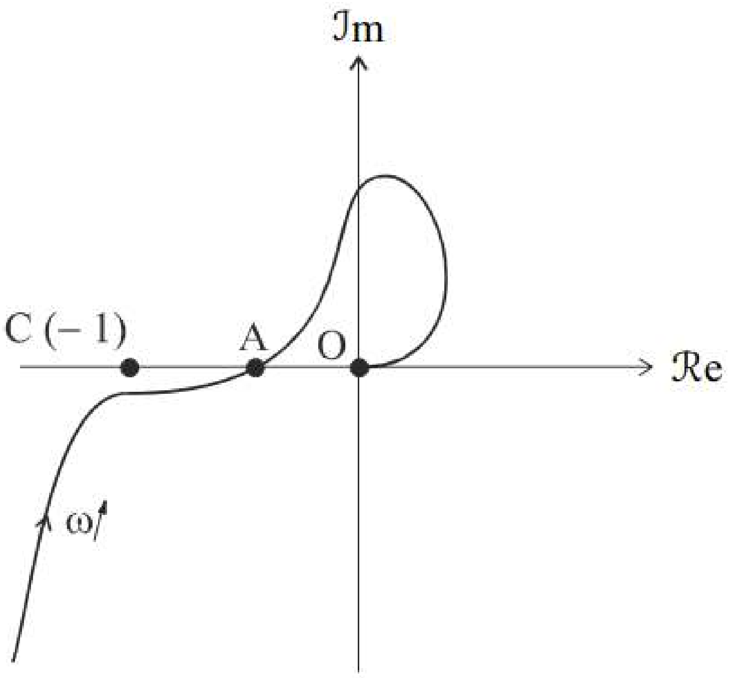
$\Delta G = -20Log\dfrac{5}{(\sqrt{3}+1)^3} = -20Log\dfrac{5}{8}$

$\Delta G = 4dB$

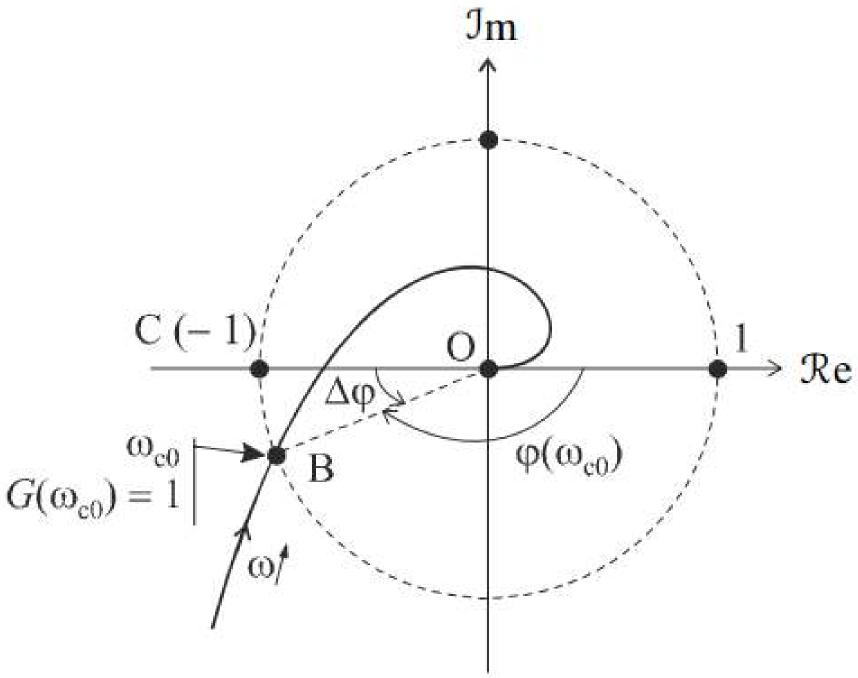
4. La marge de phase

Définition

Le diagramme de Nyquist démontre qu'une marge de gain importante n'est pas un critère d'excellent stabilité. Ainsi la courbe est éloignée au niveau de l'axe des abscisses passe néanmoins à proximité du point critique. C'est pour cette raison qu'il est important d'introduire la marche de phase.



La marge de phase permet de chiffrer "l'éloignement angulaire" entre le lieu de Nyquist et le point critique.



Traçons le cercle de rayon 1 passant par O. Ce cercle passe bien sûr par le point critique C.

Le point B situé à l'intersection du lieu de Nyquist et de ce cercle est le point du lieu qui correspond à la pulsation ω_{c0} puisque, par définition, G(ω_{c0}) = 1.

En évaluant l'éloignement de ce point B par rapport au point C, nous pouvons à nouveau définir une marge de stabilité.

Cette marge, mesurée par l'écart angulaire COB, est appelée marge de phase du système et notée $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$.

5. Marge de phase dans un diagramme de Bode

Complément

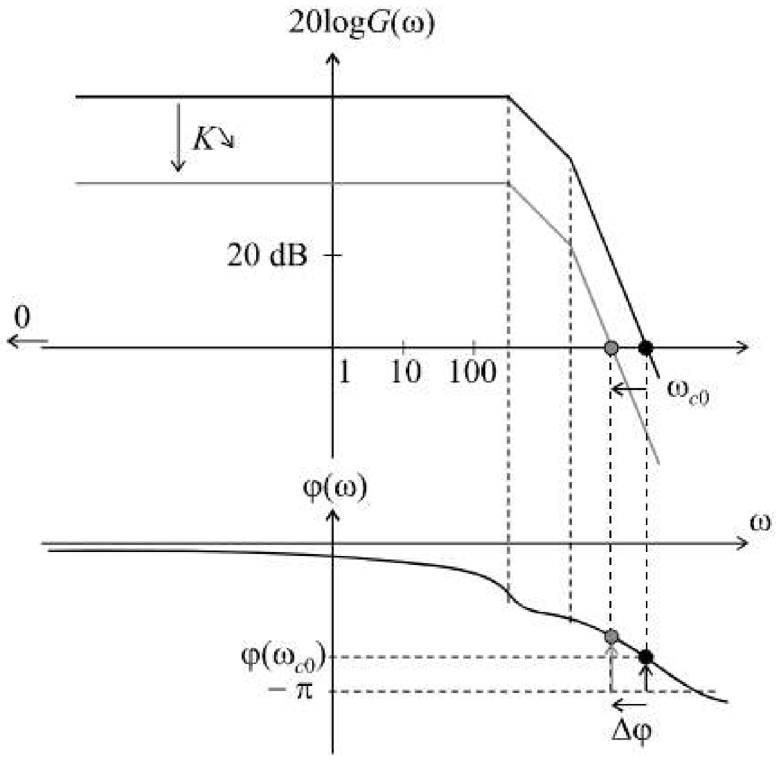
Il est également possible de mesurer la marge de phase sur un diagramme de Bode.

Méthode

1) Repérer la pulsation de coupure à 0dB ;

2) Mesurer la marge de phase comme l'écart entre $-\pi$ et le déphasage correspondant.

La figure ci-dessous illustre la méthode.



Remarque

Quand K (gain) diminue, alors on observe que la marge de phase augmente.

Remarque

En général, la marge de phase est exprimée en degrés. On considère qu'une marge de phase supérieure à 45∘ correspond à une bonne stabilité.

6. Exemple de détermination analytique de la marge de phase

Exemple

Considérons à nouveau le système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Méthode

Le calcul de la marge de phase consiste à rechercher la pulsation ω_{C0} pour laquelle le gain est nul puis à calculer $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{C0})$

Exemple : Recherche de la pulsation

$G(\omega_{C0}) = 1$

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)^3}$$

$$G(\omega_{C0}) = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{C0}^2}{10^4} + 1}\right)^3} = 1$$

On aboutit alors à :

$$\sqrt{\frac{\omega_{C0}^2}{10^4} + 1} = \sqrt[3]{5}$$

Soit : $\omega_{C0}^2 = 10^4 \times [\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - 1]$

d'où $\omega_{C0} \approx 139 rad/s$

Exemple : Calcul de la marge de phase

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{C0})$$

$$\varphi(\omega) = argG(j\omega) = 0 - 3arctan\frac{\omega}{100}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{C0}) = \pi - 3 \times arctan\frac{139}{100} = 0.3rad = 17°$$

Gain et stabilité

VI

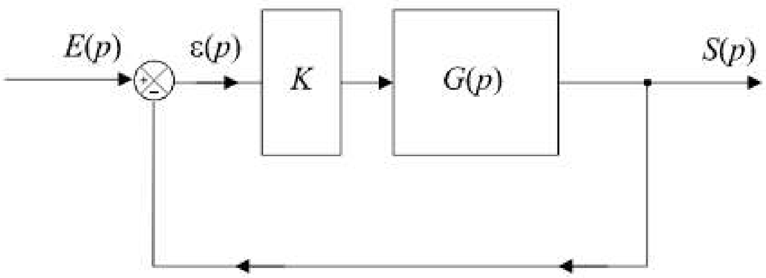
1. Influence du gain sur la stabilité

Hypothèses de départ

Un système de fonction de transfert G(p), placé dans une chaîne de régulation avec un amplificateur de gain K.

La boucle de retour est unitaire.

Tous les pôles de G(p) sont à partie réelle négative afin de pouvoir étudier la stabilité (du système en BF) à l'aide du critère du revers.



Méthode

La figure ci-dessous (en trait plein) donne le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ pour un gain K=1.

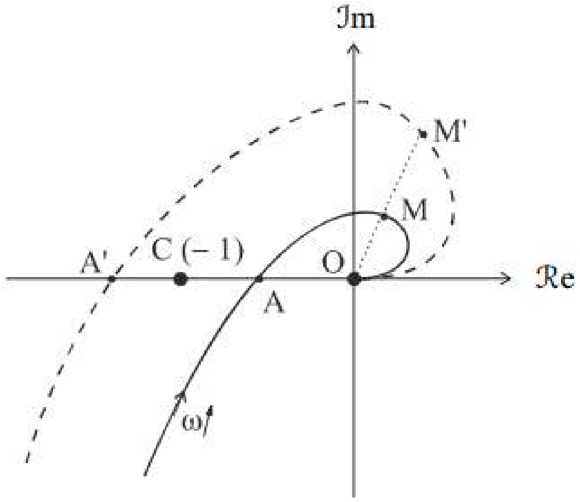
Le système est alors stable (le point -1 est à gauche du lieu (critère du revers).

Si on suppose maintenant K > 1, G(p) de vient alors G'(p) = K.G(p)

$G'(p) = K.G(p) \rightarrow G'(j\omega) = K.G(j\omega)$

$G'(\omega) = K.G(w)$ et $\varphi'(\omega) = \varphi(\omega)$

Le nouveau lieu (en pointillé sur la figure) est une homothétie du lieu précédent.



Fondamental

La figure montre alors qu'un gain trop important risque de faire passer le lieu à droite du point critique (A devient A') démontrant ainsi l'influence du gain sur la stabilité des systèmes linéaires continus.

Exercices

VII

1. Exercice : Stabilité d'un système du premier ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G (p) définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$ avec K > 0 et T > 0

Question

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique K.

Indice :

Le plus simple ici est de calculer le pôle en BF.

2. Exercice : Stabilité d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$ avec K>0

Question

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique K.

Indice :

Le plus simple ici est encore de calculer les pôles de la FTBF et déterminer leurs signes.

3. Exercice : Stabilité d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p-2)}$$ avec K>0

Question

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

Indice :

Pour utiliser le critère de Routh, il faut déterminer le dénominateur de la FTBF.

4. Exercice : Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle triple

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^3}$ avec K>0

Question 1

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

Indice :

1. Déterminer le dénominateur de la FTBF.
2. Appliquer le critère de Routh
3. Conclure

Question 2

Calculer la valeur de K qui assure au système une marge de phase égale à 45°.

Indice :

1. Déterminer la pulsation ω_{CR} telle que $\Delta\varphi - \frac{\pi}{4}$
2. Déterminer le la gain K pour avoir $G(\omega_{CR}) = 1$

5. Exercice : Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle double

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$G(p) = \dfrac{K}{p(p+3)^2}$ avec K>0

Question 1

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

Question 2

Calculer la valeur de K qui assure au système une marge de phase égale à 45◦.

6. Exercice : Réglage d'un système avec deux conditions de stabilité

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$G(p) = \dfrac{K}{p(p+100)^2}$ avec K>0

Question

Déterminer les conditions sur la valeur de K de manière à ce que le système soit caractérisé, en boucle fermée à retour unitaire, par une marge de phase supérieure à 45◦ et par une marge de gain supérieure à 6 dB.

7. Exercice : Mise en évidence des marges sur les diagrammes de Bode

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$G(p) = \frac{K}{(p+10)^3}$ avec $K > 0$

Question 1

Déterminer la valeur de K qui assure au système une marge de gain égale à 6 dB.

Question 2

Calculer la marge de phase pour cette valeur de K.

Question 3

Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte en y faisant apparaître ces marges.

Indice :

On fait tendre p vers 0 : G # K/1000 # 3.98 soit 12dB. Cela est valable jusque la pulsation de coupure (10 rad/s).

Pour les pulsations élevées, une pente de -60 dB/dec pour une ordre 3.

Il suffit après de repérer les points calculés précédemment.

8. Exercice : Réglage de la pulsation de coupure à 0 dB

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte G(p) définie par :

$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2}$ avec K>0

Question 1

Déterminer la valeur de K qui permet d'obtenir une pulsation de coupure à 0 dB égale à :

$\omega_{C0} = 20\ rad/s$

Question 2

Déterminer la valeur de la marge de phase pour cette valeur de K.