Modélisation des systèmes asservis continus

Table des matières

1ère partie : Justification de la commande en boucle fermée

I

1. Introduction

Définition

Le rôle de l'automatique est de déterminer le meilleur signal d'entrée à appliquer à un système afin que ce dernier réponde de la manière souhaitée.

2. La commande en boucle ouverte

Le principe

Dans un système, l'application d'un signal d'entrée e(t) donné permettra d'obtenir un signal de sortie s(t) voulue. Cela suppose de connaître le modèle mathématique du système comme par exemple sa fonction de transfert G (p).

La transformée de Laplace nous donne :

$$S(p) = G(p).E(p) \Rightarrow E(p) = \frac{S(p)}{G(p)}$$

La transformée de Laplace inverse nous permet de retrouver la l'expression temporelle de la tension e(t).

$$E(p) \rightarrow e(t)$$

Exemple : Le moteur à courant continu

La connaissance du modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension à appliquer en entrée pour obtenir la vitesse de sortie voulue.

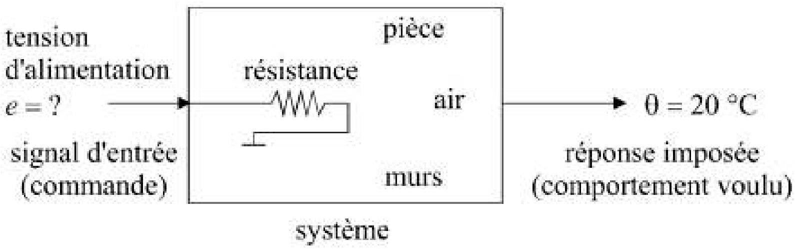
3. Inconvénients de la commande en boucle ouverte

La réalité des systèmes

Dans la réalité ce déterministe est impossible. En effet, les modèles de fonctionnement sont obligatoires simplifiés et ne prennent pas en compte tous les paramètres. De plus, les systèmes réels sont soumis à des perturbations généralement imprévisibles et difficilement modélisables.

Exemple : Un système de chauffage

Même en connaissant parfaitement le modèle du radiateur électrique, les différentes pertes des murs de la pièce (ce qui donnerait un modèles extrêmement complexe), il reste impossible de prévoir la disparition d'un nuage nuage qui fera entrer le soleil dans la pièce ruinant ainsi la prédiction du signal e(t) que nous avions si laborieusement obtenu.



Le problème

En écrivant S(p) = G(p).E(p), nous établissons un **modèle prédictif** qui ne peut prendre en compte l'imprévisible !

4. La commande en boucle fermée

Fondamental : Principe

La commande des systèmes en boucle fermée est une question de logique et de bon sens.

Pour maîtriser le fonctionnement d'un système, il faut en permanence mesurer son comportement. Tout écart entre la mesure et le comportement attendu doit provoquer une action sur le signal de commande.

Exemple : Le système de chauffage

Dans l'exemple précédent, mesurons la température et décidons de chauffer si la température est inférieure à la température de consigne, d'arrêter le chauffage si la température est atteinte. C'est ce que fait un thermostat !

On peut d'ailleurs, aller plus loin, en chauffant plus si la température est très éloignée de la consigne et ralentir la puissance de chauffe à mesure que nous nous approchons de la température de consigne.

Il pourrait même être envisagée d'employer un dispositif de refroidissement au cas où la température de consigne serait dépassée : c'est un dispositif de climatisation.

Méthode : En conclusion pour mieux commander un système quelconque, il faut :

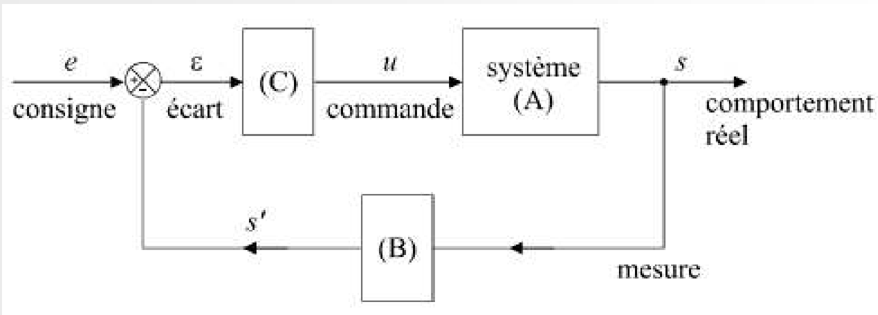
- Mesurer l'évolution de son comportement par un capteur adéquat ;
- Comparer l'information du capteur à une valeur de consigne ;
- Utiliser la différence entre consigne et mesure comme information permettant de construire le signal de commande.

5. Schéma d'un système en boucle fermée

Fondamental : Schéma général

Il fait apparaître :

- La mesure du comportement réel du système, suivie généralement d'un dispositif (B) servant à adapter la grandeur mesurée ;
- Un soustracteur qui calcule l'écart ε entre la consigne e et la mesure s' ;
- Un dispositif (C) qui adapte l'écart ε en un signal de commande u ;



Définition : Chaîne directe et de retour

L'ensemble constitué du système (A) et éventuellement (C) est appelé chaîne directe ou chaîne de commande.

L'ensemble constitué de la mesure et dus dispositif (B est appelé chaîne de retour ou boucle de retour).

6. Retour sur le système de chauffage

État initial

Il fait dans la pièce 10°C alors que l'objectif est 20°C.

Un capteur délivre une tension $U = k \times \theta$ avec k = 1V/°C.

A t = 0, on allume le système, le signal de consigne passe alors de 0V à 20V.

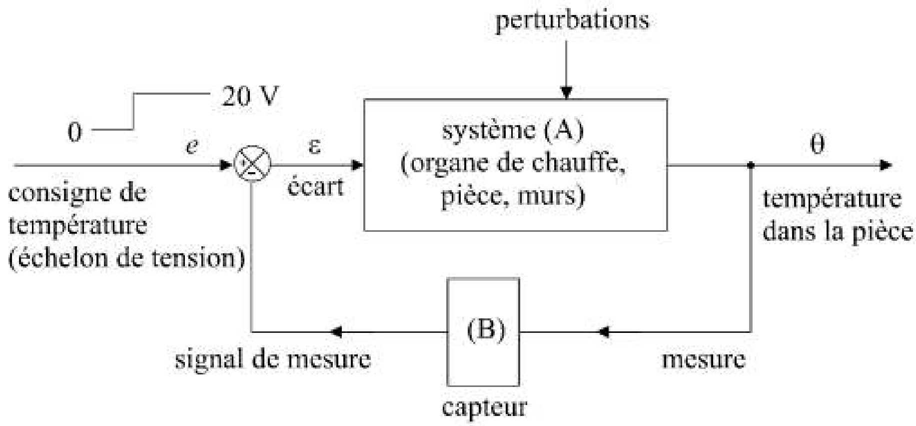
Évolution du système

Dès la mise en route du système, le capteur mesure la température de 10°C, donc une tension de 10V. L'écart est donc de 10V, et la puissance de chauffe est importante.

L'air de la pièce va alors se réchauffer, la température mesurée croît, l'écart a donc tendance à diminuer.

Plus la température mesurée se rapproche de la consigne, plus le signal de commande décroît faisant diminuer la puissance de chauffage à mesure que l'on approche des 20°C.

Lorsque la mesure est égale à la consigne, le système de chauffage s'arrête.



Réaction à une perturbation

Si on ouvre brutalement la fenêtre, la température va chuter de manière importante (en supposant qu'il fasse froid dehors), l'écart entre mesure et consigne va alors augmenter forçant le système à réagir de sorte de revenir rapidement à la température de 20°C.

Partie 2 : Modélisation d'un boucle de régulation

II

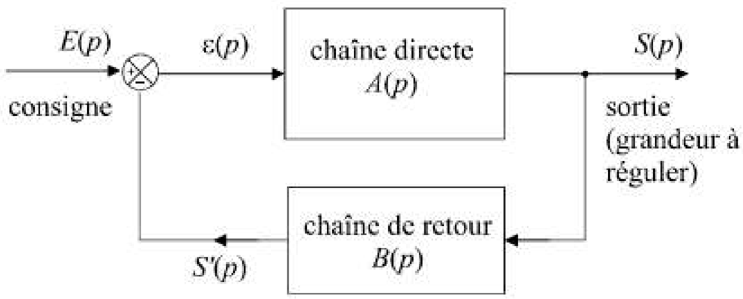
1. Introduction

Hypothèses

Les systèmes et dispositifs sont linéaires.

L'utilisation de la transformée de Laplace est justifiée liant ainsi par sa fonction de transfert l'entrée et la sortie.

Chaque signal est ainsi défini par sa transformée de Laplace.



Complément : Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système

à vos stylos !

2. Expression dans la cas d'un retour unitaire

Posons $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$: C'est la fonction de transfert en boucle fermée.

La fonction de transfert en BO est : $G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p) \times B(p)$

Dans le cas d'un retour unitaire, B(p) = 1.

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)$$

d'où $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$

Partie 3 : Stabilité et performances

III

1. Le problème de la stabilité

Fondamental : Le signal de sortie converge-t-il effectivement vers une valeur finie ou est-il susceptible de diverger ou d'osciller ?

Ce problème est encore plus important dans les systèmes bouclés, où le signal de sortie est réinjecté en entrée du système.

- La boucle peut se comporter comme prévu et tendre vers une valeur qui se rapproche de la consigne : c'est un fonctionnement **stable** ;
- La boucle peut également s'emballer avec une non convergence du signal de sortie : c'est un comportement **instable**.

Remarque : Prochain chapitre

Un prochain chapitre traitera de la conception d'une boucle de régulation et les méthodes pour assurer à tout prix un comportement stable.

2. Les performances d'un système régulé

Prévisions et corrections

En supposant, avoir conçu un système stable (ce qui est une obligation), il existe des performances qu'au minimum il faudra prévoir, au mieux corriger si elles ne sont pas satisfaisantes.

Exemple : Le système de chauffage

On attend que le système atteigne :

- la valeur la plus proche possible de la consigne : c'est la **précision** du système ;
- la température demandée, le plus rapidement possible : c'est la **rapidité** du système ;

Remarque : Le régime transitoire

En plus d'être le plus court possible, il faut s'intéresser au phénomène de dépassement. En effet, il ne serait pas acceptable par exemple, pour atteindre une température de 20°C, passer par une phase où il ferait 23°C dans la pièce.

Fondamental : Les 3 performances

- Précision
- Rapidité
- Limitation / absence de dépassement

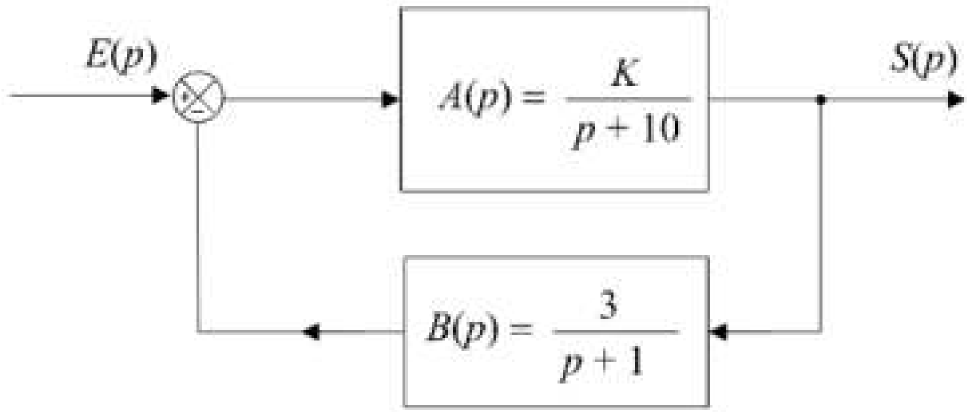
sont les 3 performances qu'il faudra prévoir voire corriger pour répondre à un cahier des charges imposé.

Exercices

IV

1. Exercice : Calcul d'une fonction de transfert en boucle fermée

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure ci-dessous :



Question

Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

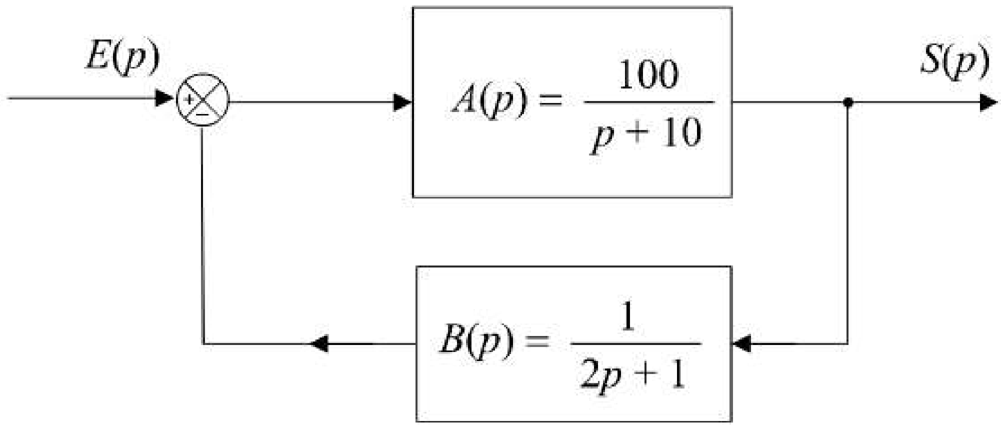
Indice :

$G(p) = A(p) \times B(p)$: c'est la fonction de transfert en BO

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$: c'est la fonction de transfert en BF.

2. Exercice : Réduction à retour unitaire d'une boucle de régulation

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure ci-dessous.



Question 1

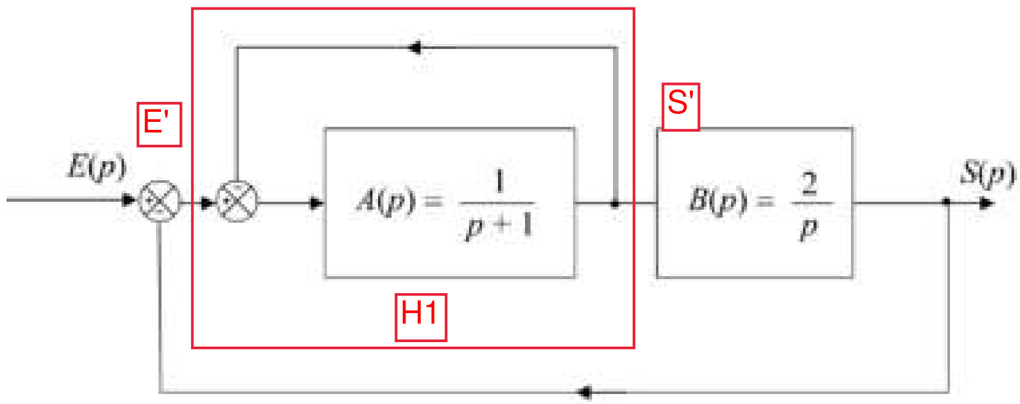
Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

Question 2

Proposer un schéma équivalent à cette boucle de régulation dans laquelle le retour sera unitaire.

3. Exercice : Calcul d'une fonction de transfert d'une double boucle

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure ci-dessous.

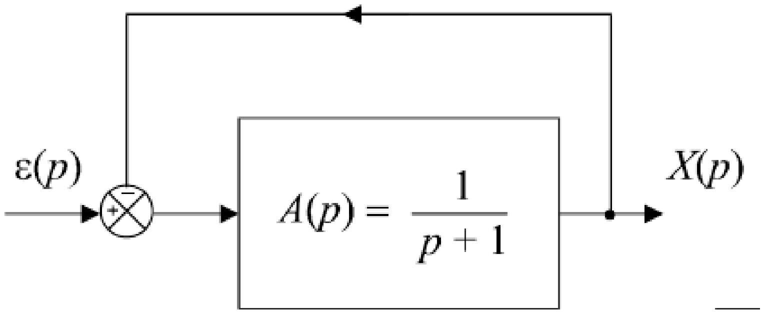


Question

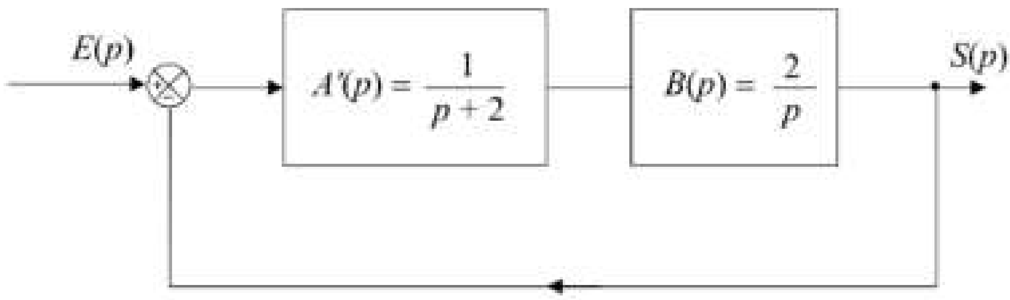
Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

Indice :

Dans le schéma ci-dessous, calculer A'(p), la fonction de transfert en BF.

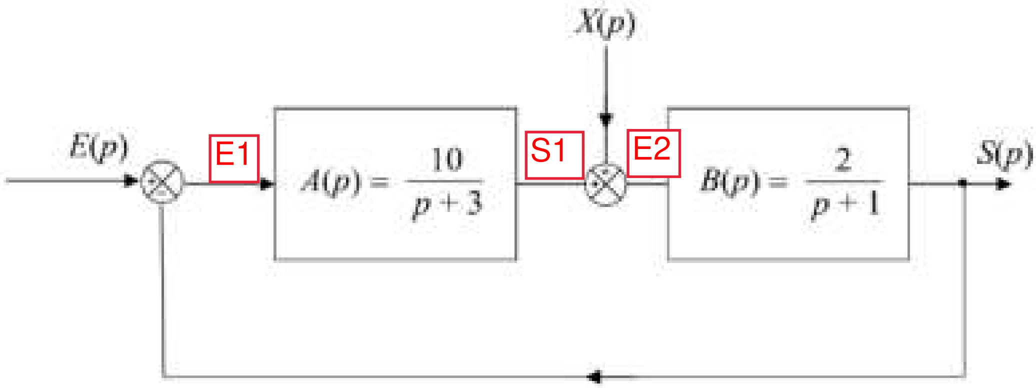


- $G(p) = A'(p) \times B(p)$
- $H(p) = \dfrac{G(p)}{1 + G(p)}$



4. Exercice : Calcul de la fonction de transfert d'un système perturbé

Dans le schéma de la figure c-dessous, on a modélisé les perturbations susceptibles d'agir sur la chaîne directe d'une boucle de régulation par le signal X(p).



Question 1

Calculer l'expression de S(p) en fonction de E(p), X(p) et des différentes fonctions de transfert des éléments du système.

Question 2

Calculer la fonction de transfert H1(p) définie par :

$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$ lorsque X(p) = 0

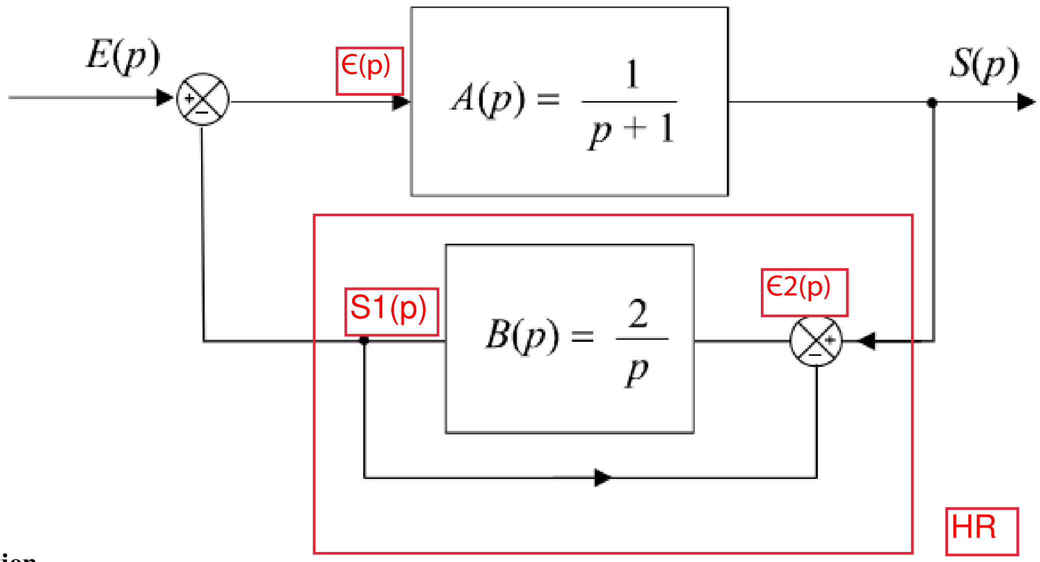
Question 3

Calculer la fonction de transfert H2(p) définie par :

$$H_2(p) = \frac{\boxed{S(p)}}{\boxed{X(p)}}$$ lorsque E(p) = 0

5. Exercice : Fonction de transfert à retour régulé

Soit le système décrit ci-dessous.



Question

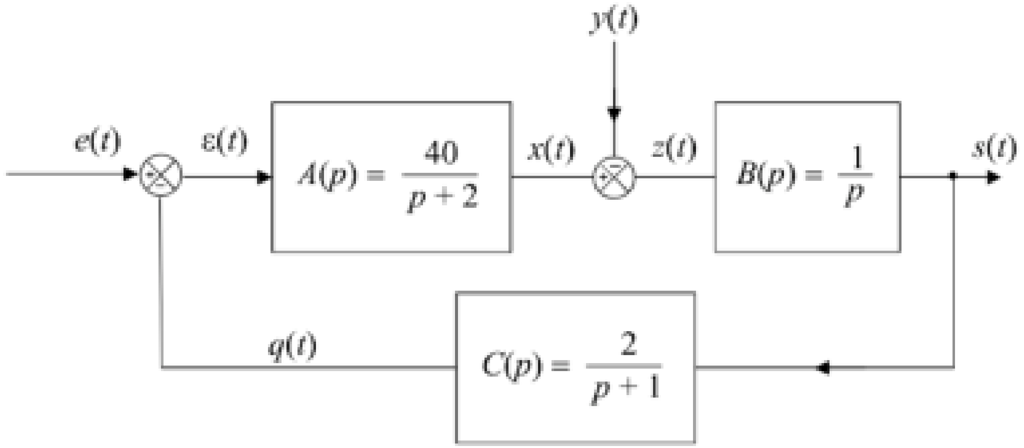
Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système représenté ci-dessus.

6. Exercice : Détermination de l'état d'équilibre d'un système en boucle fermée

Le système asservi de la figure ci-dessous est supposé stable.

On applique, à l'instant t = 0, deux signaux e(t) et y(t) qui sont respectivement un échelon unité et un échelon de hauteur 4.

Soit e(t) = u(t) et y(t) = 4 · u(t).



Question

Déterminer, en régime permanent, la valeur de tous les signaux présents dans cette boucle.

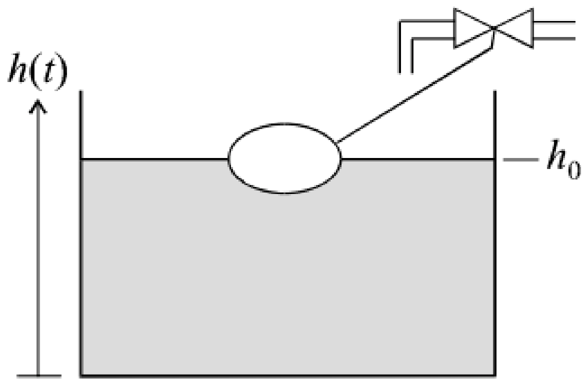
7. Exercice : Mise en équation et étude d'un asservissement de niveau dans une cuve

On considère une cuve parallélépipédique de section $S = 800cm^2$ munie d'un flotteur raccordé à une vanne.

La vanne assure le remplissage de la cuve avec un débit q proportionnel à la différence de hauteur d'eau par rapport à une hauteur de consigne $h_0 = 24cm$.

La vanne est donc fermée si $h = h_0$ et ouverte au maximum lorsque la cuve est vide.

On notera k ce coefficient de proportionnalité et on donne : $k = 0,002m^2/s$.



Question 1

Établir le schéma fonctionnel du système en faisant apparaître une boucle de régulation.

h_0 correspond à la consigne, h(t) correspond à la réponse du système.

Question 2

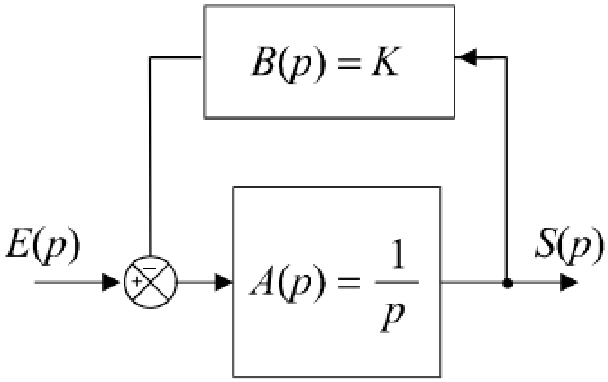
Établir la fonction de transfert en boucle fermée de ce système.

Question 3

On suppose que la cuve se vide brutalement.

Calculer le temps de réponse du système qui donne un ordre de grandeur du temps de remplissage de la cuve.

8. Exercice : Décomposition d'un asservissement en blocs intégrateurs simples

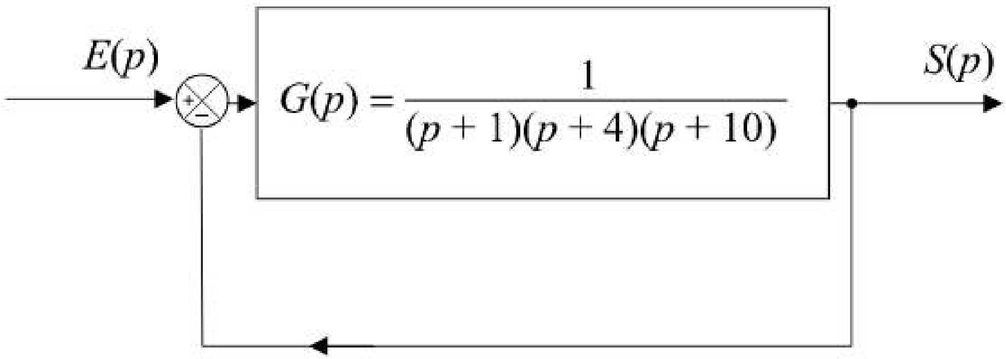


Question 1

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système présenté sur la figure ci-dessus.

Question 2

Montrer que la boucle d'asservissement présentée sur la figure ci-dessous peut être représentée en n'utilisant, dans la chaîne directe, que des intégrateurs bouclés à l'aide de gains correctement choisis.



Prépa - Concours

V

1. Exercice : Sujet de concours 1

Partie B : régulation de la température

Les composants utilisés en vidéo sont sensibles aux dérives en température. Or les murs d'image peuvent être installés dans des environnements perturbés.

Pour éviter des fluctuations de l'image, le constructeur réalise une régulation de la température à 40 °C du composant d'échantillonnage des signaux analogiques. Cette régulation est obtenue en pilotant la vitesse du ventilateur de refroidissement.

L'objectif de cette partie est de définir l'algorithme de pilotage du ventilateur pour réaliser cette régulation conformément aux exigences ci-dessous :

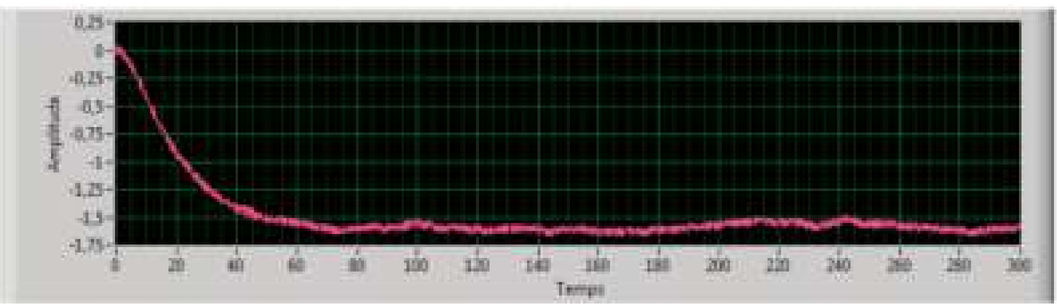
- erreur statique nulle ;
- dépassement < 15% ;
- temps de réponse à 5% < 10 secondes.

B1 : modélisation du processus

Pour modéliser le processus, le constructeur a choisi d'effectuer un essai en boucle ouverte dans les conditions suivantes :

- le dispositif est placé dans son environnement (sources de chaleur constantes) ;
- le ventilateur est alimenté avec une tension de 4 V et la température est stabilisée à 40 °C ;
- un échelon de tension de 0,5 V est appliqué sur le ventilateur (sa tension d'alimentation passe donc à 4,5 V) ;
- la carte d'acquisition trace l'évolution de la variation de la tension issue du capteur de température à partir de l'instant d'application de l'échelon (signal « Amplitude » exprimé en V) ;
- le capteur de température délivre une tension 0 à 10 V pour une température de 0 à 100 °C.

La réponse temporelle expérimentale obtenue est représentée ci-dessous :



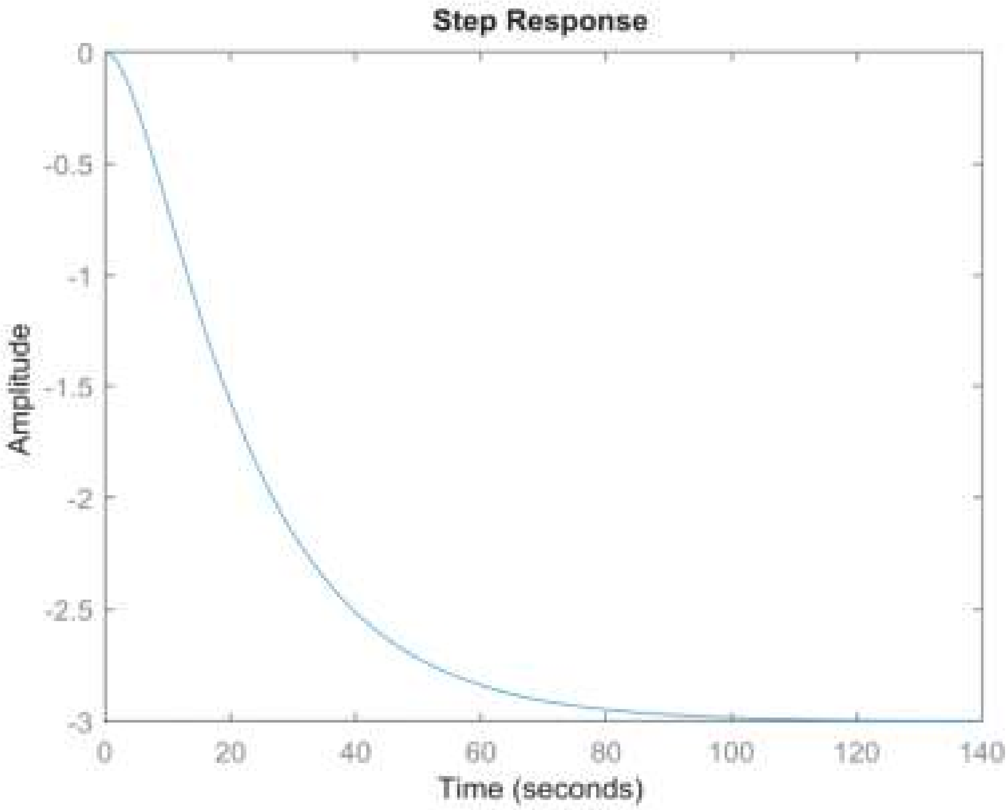
Hypothèse

On fait l'hypothèse de la linéarité du modèle thermique autour du point de fonctionnement.

Un algorithme d'identification donne le modèle suivant :

$$\frac{Amplitude(s)}{E(s)} = \frac{H_0}{(1+t_1.s)(1+t_2.s)} = \frac{-3}{(1+6s)(1+18s)}$$

La réponse indicielle de cette fonction de transfert (réponse à un échelon unitaire en entrée) est représentée sur le document ci-dessous.



Question 1

Q23. Proposer sur le document réponse DR2 les constructions graphiques permettant de retrouver les paramètres H_0, t_1 et t_2 du modèle pour une entrée en échelon unitaire.

Indice :

Il faut tracer la tangente au point d'inflexion de la courbe.

On obtient ainsi t_1 et $t_1 + t_2$

Question 2

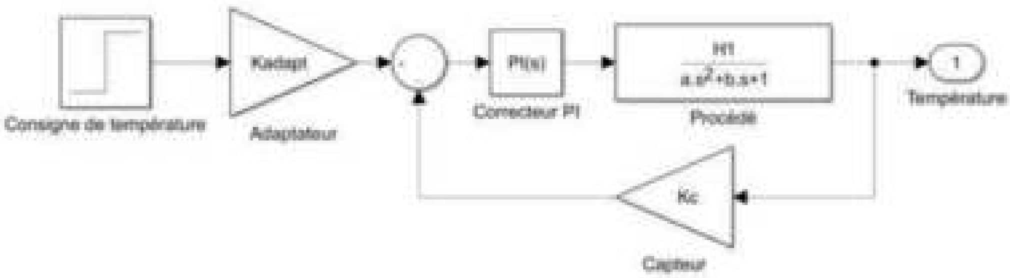
Q24. Justifier la valeur négative de la fonction de transfert en regard des phénomènes physiques mis en jeu.

Indice :

Que se passe-t-il quand la ventilation se met en marche ?

L'asservissement de température est réalisé par une architecture qui peut être représentée par le modèle de la figure 4 avec les paramètres suivants :

Paramètre	H_1	K_{adapt}	K_c	a	b
Valeur	30	0.1	0.1	108	24



Question 3

Q25. Justifier la valeur des différents paramètres.

Indice :

Reprendre l'équation de départ, la développer et comparer au système en boucle fermée.

2. Exercice : Sujet de concours 2 : Automatisation d'une maquette de magasin vertical

Étude de la partie continue

Modélisation générale

Le moteur est une machine à courant continu fonctionnant à flux constant et à commande d'induit. Les hypothèses simplificatrices classiques seront admises : hystérésis et chutes de tension négligées, non saturation magnétique, comportement linéaire...

Le moteur pourra alors être décrit par un modèle stationnaire du 2ème ordre à partir des paramètres suivants :

• Jm : moment d'inertie total des masses tournantes

• f : coefficient de frottements visqueux

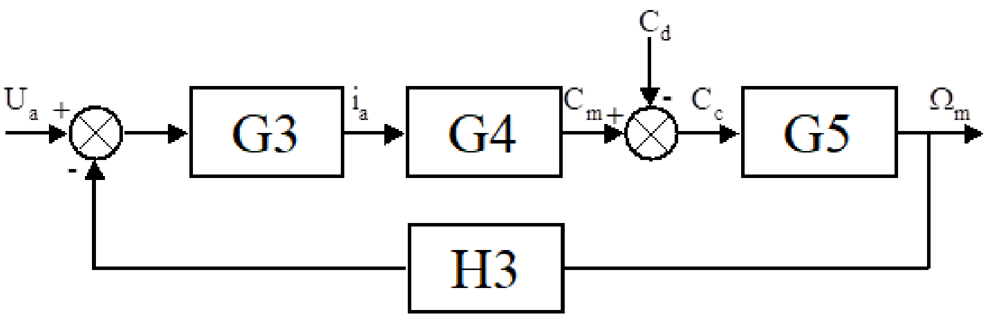
• km : coefficient de couple du moteur

• ke : coefficient de force contre-électromotrice du moteur

• Ra , La : résistance et inductance de l'induit

C.1.1 Schéma-bloc moteur

Le moteur est représenté sur le schéma-bloc ci-après où ua(t), ia(t). et $\Omega m(t)$ désignent respectivement la tension d'induit, le courant d'induit et la vitesse de l'arbre du moteur à l'instant t.



Question 1

Caractériser les couples Cm(t), Cd(t) et Cc(t).

Indice :

Si Cm est le couple moteur ....

Alors Cd est ....

et Cc est le couple ....

Question 2

Donner les expressions des fonctions de transfert $G_3(p)$, $G_4(p)$, $G_5(p)$ et $H_3(p)$ à partir des coefficients prédéfinis.

Indice :

Il faut revenir aux équations qui régissent le fonctionnement d'une machine à courant continu.

$$U(p) = E(p) + (R_a + L_a p).I_a(p)$$
$$E(p) = K_e.\Omega_m(p)$$
$$C(p) = K_m.I_a(p)$$
$$C_m(p) - C_d(p) - f.\Omega_m(p) = J.p.\Omega_m(p)$$

C.1.2 Fonction de transfert

$$\frac{\Omega_m(p)}{u_a(p)}$$

Question 3

- Déterminer, en l'absence de signal perturbateur Cd(t), la fonction de transfert entrée – sortie de ce système :

$$G(p) = \frac{\Omega_m(p)}{u_a(p)}$$

On l'exprimera tout d'abord, à partir des fonctions de transfert G3(p), G4(p), G5(p) et H3(p). Il est rappelé que pour des questions de concision de rédaction il est admis de remplacer Fi(p) par Fi .

On donnera ensuite l'expression de G(p) en fonction des différents paramètres électromécaniques du système et des constantes de temps électrique (Te) et mécanique (Tm) du système en boucle ouverte.

- Caractériser ces constantes de temps.

Question 4

Déterminer le gain statique de G(p), que l'on désignera par kem.

C. 1. 3 Détermination des paramètres

On se propose d'estimer les paramètres du modèle établi à la question précédente à partir des différentes données précisées dans la présentation générale du dispositif technologique.

On considère en outre que Jm = 3 . 10 – 4 kg.m2 et que les constantes km en Nm/A et ke en Vs/rad ont la même valeur numérique que l'on prendra égale à 0,125 compte tenu des approximations des données constructeur.

Question 5

Calculer les différents paramètres impliqués dans l'expression de G(p).

Question 6

Mettre le résultat sous la forme : $G(p) = \frac{k_{em}}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$ avec T1 < T2. Calculer numériquement T1 et T2.

C. 1. 4 Simplification

On admet que la réponse du circuit électrique est infiniment plus rapide que celle de la partie mécanique. En d'autres termes, on considère que l'établissement du courant est instantané.

Question 7

Montrer que la fonction de transfert $G(p) = \frac{\Omega_m(p)}{u_a(p)}$ peut se simplifier sous la forme :

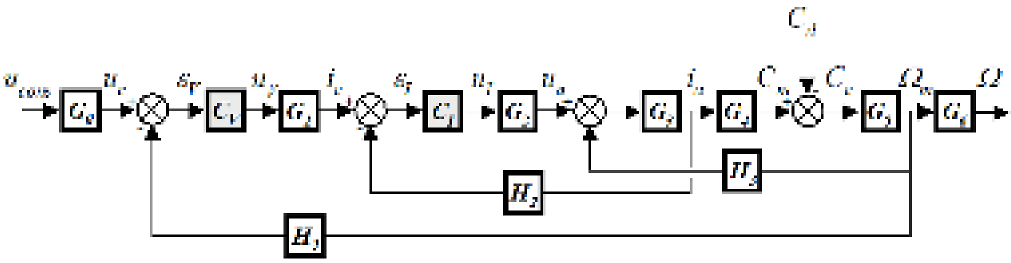
$$G(p) = \frac{\Omega_m(p)}{u_a(p)} = \frac{k_{em}}{1 + T_{em}.p}$$

Question 8

Donner les valeurs numériques de kem et de Tem .

3. Exercice : Sujet de concours 3 : Automatisation d'une maquette de magasin vertical (suite)

On propose pour la suite de représenter l'ensemble du système moteur-variateur, à partir d'une modélisation simplifiée des différents étages par fonction de transfert selon le schéma-bloc ci-après :



C. 2. Réglage du courant d'induit

On considère le problème de poursuite – régulation associé au maintien du courant moteur ia(t) proche du courant de consigne ic(t) en dépit des perturbations non déterministes du couple Cd(t).

C. 2. 1. Modélisation

La relation existante entre les transformées de Laplace des trois signaux précédemment évoqués, peut être exprimée sous la forme :

$$i_a(p) = S_p(p).i_c(p) + S_r(p).C_d(p)$$

avec :

$$S_p(p) = \frac{C_1(p).G'(p)}{1 + C_1(p).G'(p).H_2(p)}$$

$$S_r(p) = \frac{G''(p)}{1 + C_1(p).G'(p).H_2(p)}$$

Question 1

Donner les expressions de G'(p) et de G''(p) en fonction des transmittances Gi(p) et Hj(p).

Il est rappelé que pour des questions de concision de rédaction il est admis de remplacer Fi(p) par Fi

C. 2. 2. Expression de G'(p) et G''(p)

Identification des fonctions de transfert

Question 2

Exprimer G'(p) et G''(p) en fonction de G(p) (définie au C. 1. 2) et de transmittances Gi(p) et Hj(p).

C. 2. 3. Performances statiques et dynamiques

- Rapidité
- Dépassement
- Erreur

Question 3

Caractériser les objectifs de la correction de la boucle de courant, en terme de comportement statique et dynamique des fonctions de transfert Sp(p) et Sr(p).