Performances des systèmes asservis linéaires

Table des matières

I - **Introduction au problème** 4

1. Problématique 4

II - **Précision** 6

1. Erreur statique ou erreur de position 6

2. Erreur de position d'un système de gain statique K en BO 6

3. Erreur de position dans le cas d'un ou plusieurs pôles nuls 7

4. Erreur de vitesse ou erreur de traînage 8

5. Erreur de vitesse d'un système de gain statique K en BO 8

6. Erreur de position dans le cas d'un ou plusieurs pôles nuls 9

III - **Rapidité** 10

1. Définitions 10

2. Temps de montée d'un système du second ordre 11

3. Conclusion 13

IV - **Dépassement** 14

1. Dépassement pour un système du second ordre 14

V - **Gain et performances** 16

1. Gain statique en BO et performances en BF 16

VI - **Exemple traité** 18

1. Exemple 18

2. Étude de la stabilité 18

3. Réglage du gain 19

4. Prédiction du temps de montée 20

VII - **Exercices** 21

1. Exercice : Évaluation de la précision d'un système 21

2. Exercice : Évaluation de la précision d'un système 21

3. Exercice : Réglage de la précision d'un système du deuxième ordre 21

4. Exercice : Évaluation des performances globales d'un système du deuxième ordre 22

5. Exercice : Réglage de la rapidité d'un système du second ordre 22

6. Exercice : Limitation du dépassement d'un système du troisième ordre 22

7. Exercice : Optimisation des performances d'un système du troisième ordre 23

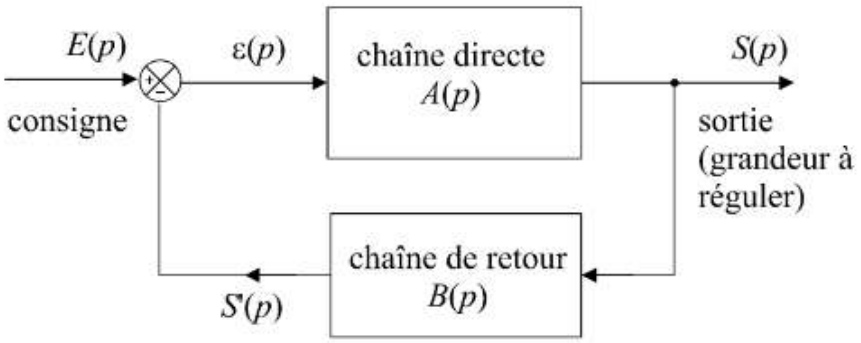
8. Exercice : Réglage de la rapidité d'un système du troisième ordre 23

Introduction au problème

I

1. Problématique

On considère le système le système à réguler ci-dessous dans lequel on injecte un signal d'entrée e(t) sous le forme d'un échelon.

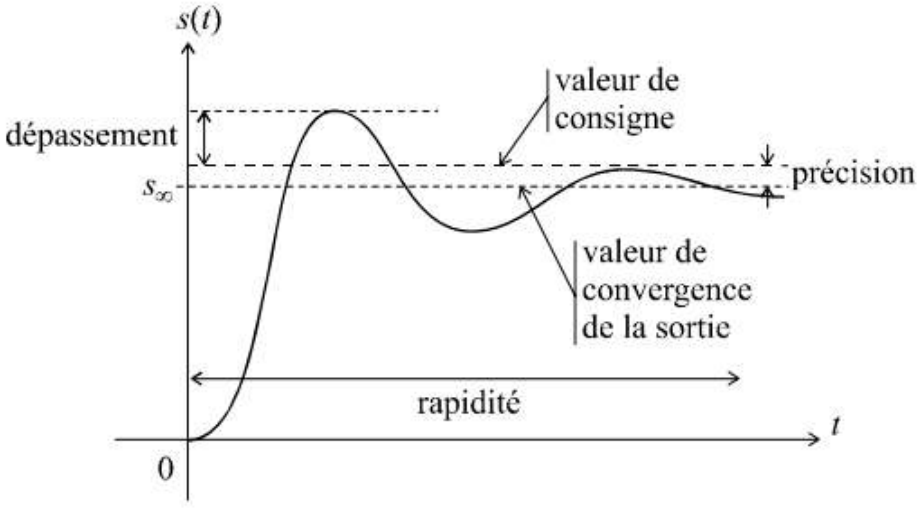


Fondamental : Les 3 paramètres

En plus de la stabilité, on veut que le signal de sortie du système soit :

- Le plus plus proche possible de la valeur de consigne ;
- Le plus rapide possible pour atteindre cette valeur ;
- avec un dépassement éventuel temporaire contrôlé.

La figure ci-dessous illustre ces paramètres.



Précision

II

1. Erreur statique ou erreur de position

Définition

Soit un système bouclé de FTBO G(p) et de FTBF H(p), on appelle erreur statique ou de position ε_p telle que :

$\varepsilon_p = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$ avec e(t) = ut(t), échelon unitaire.

Le théorème de la valeur finale nous donne :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.[E(p) - S(p)] = \lim_{p \to 0} p.[E(p) - H(p).E(p)]$$

Puisque l'entrée est un échelon unitaire, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.\left[\frac{1}{p} - \frac{H(p)}{p}\right]$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)]$$

Remarque

L'erreur de position est l'un des paramètres qui permet d'évaluer la précision d'un système bouclé.

Plus ε_p est faible, meilleure est la précision du système.

2. Erreur de position d'un système de gain statique K en BO

Contexte de l'étude

Soit un système à retour unitaire de FTBO $G(p) = \dfrac{K}{1 + a_1.p + a_2.p + \ldots + a_n.p^n}$

Rappel : Vérification du gain statique K

$$\lim_{\omega \to 0} G(\omega) = \lim_{p \to 0} G(p) = K.$$

Détermination de laFTBF

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{1 - K + a_1.p + a_2.p^2 - \ldots + a_n.p^n}$$

En appliquant la formule établie précédemment :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \to 0} 1 - \frac{K}{1 + K + a_1 p + a_2 p^2 \quad \ldots \quad a_n p^n}$$

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{K}{1 - K} = \frac{1}{K + 1}$$

Fondamental

L'erreur de position en BF d'un système possédant un gain statique K en BO est égale à :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{K + 1}$$

Plus la gain statique est important, plus la précision est grande.

Remarque : Compromis

Dans le chapitre précédent, nous avons établi que le gain ne devait pas être trop grand sous peine de devenir instable. Ici, nous concluons dans le fait qu'il faut avoir un gain important pour minimiser l'erreur. Nous verrons dans le prochain chapitre comment concilier les 2 !

3. Erreur de position dans le cas d'un ou plusieurs pôles nuls

Contexte

Soit un système en BO G(p) tel que :

$$G(p) = \frac{K}{p^n(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n)}$$ n est un entier positif non nul.

La FTBF s'exprime alors ainsi :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^n(1 + a_1 p - a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n)}$$

Complément : Détermination de l'erreur de position correspondante

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \to 0} 1 - \frac{K}{K \quad p^n(1 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \quad a_n p^n)}$$

$$\varepsilon_p = 1 - \frac{K}{K} = 0$$

Fondamental : A retenir

L'erreur de position en BF d'un système dont la FTBO comporte au moins un pôle nul, est nulle.

Complément : dit autrement...

Les systèmes comportant au moins un intégrateur dans le fonction de transfert à boucle ouverte sont dits à précision parfaite.

4. Erreur de vitesse ou erreur de traînage

Définition

Soit un système dont G(p) est la FTBO et H(p) la FTBF associée.

On appelle erreur de vitesse (ou erreur de traînage) du système en BF, le paramètre ε_v défini par :

$\varepsilon_v = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$ lorsque e(t) = t, la rampe unitaire.

En utilisant le théorème de la valeur finale, on trouve :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.[E(p) - S(p)] = \lim_{p \to 0} p.[E(p) - H(p).E(p)]$$

Puisque le signal d'entrée est la rampe unitaire, $E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p.[E(p) - H(p).E(p)] = \lim_{p \to 0} p.\left[\frac{1}{p^2} - \frac{H(p)}{p^2}\right]$$

L'erreur de vitesse est alors : $\lim_{p \to 0} \frac{1 - H(p)}{p}$

Remarque : Intérêt

Si l'erreur statique est particulièrement adaptée à un système régulé (la sortie doit atteindre la consigne d'entrée), l'erreur de vitesse est particulièrement adaptée aux asservissements (dans lesquels la sortie doit suivre les variations du signal d'entrée).

5. Erreur de vitesse d'un système de gain statique K en BO

Contexte de l'étude

Soit un système à retour unitaire de FTBO $G(p) = \frac{K}{1 + a_1.p + a_2.p + \ldots + a_n.p^n}$

Détermination de laFTBF

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{1 - K + a_1.p + a_2.p^2 - \ldots + a_n.p^n}$$

En appliquant la formule établie précédemment :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0}\left|\frac{1 - H(p)}{p}\right| = \lim_{p \to 0}\frac{1}{p}\left|1 - \frac{K}{1 + K + a_1.p + a_2.p^2 + \ldots + a_n.p^n}\right|$$

$$\varepsilon_v = +\infty$$

Fondamental

L'erreur de vitesse en BF d'un système possédant un gain statique K en BO est infinie.

Remarque

Il est donc impossible pour un système de gain statique K en BO, d'arriver à une bonne précision face à une consigne variable dans le temps.

6. Erreur de position dans le cas d'un ou plusieurs pôles nuls

Contexte

Soit un système en BO G(p) tel que :

$$G(p) = \frac{K}{p^{\alpha}(1 + a_1.p + a_2.p^2 + ... + a_n.p^n)}$$ α est un entier positif non nul.

La FTBF s'exprime alors ainsi :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^{\alpha}(1 + a_1.p + a_2.p^2 + ... + a_n.p^n)}$$

Complément : Détermination de l'erreur de position correspondante

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left| \frac{1 - H(p)}{p} \right| = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p} \left| 1 - \frac{K}{K + p^{\alpha}(1 + a_1.p + a_2.p^2 + ... + a_n.p^n)} \right|$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p} \left[\frac{p^{\alpha}}{K + p^{\alpha}} \right] = \lim_{p \to 0} \left[\frac{p^{\alpha - 1}}{K + p^{\alpha}} \right]$$

Complément : Si 1 pôle nul

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left[\frac{1}{K + p} \right] = \frac{1}{K}$$

Complément : Si plus de 1 pôle nul

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left[\frac{p}{K + p^{\alpha}} \right] = 0$$

Fondamental

Dans un système à boucle fermé, l'erreur de vitesse sera nulle si la FTBO contient 2 intégrateurs (un pôle nul double). Il sera alors en mesure de suivre sans erreur les variations du signal d'entrée.

Si G(p) possède un seul pôle nul, alors l'erreur de vitesse est non nulle (constante).

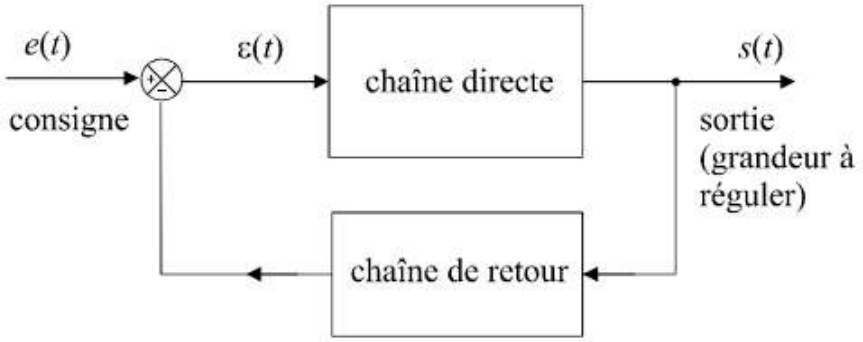
Rapidité

III

1. Définitions

Contexte

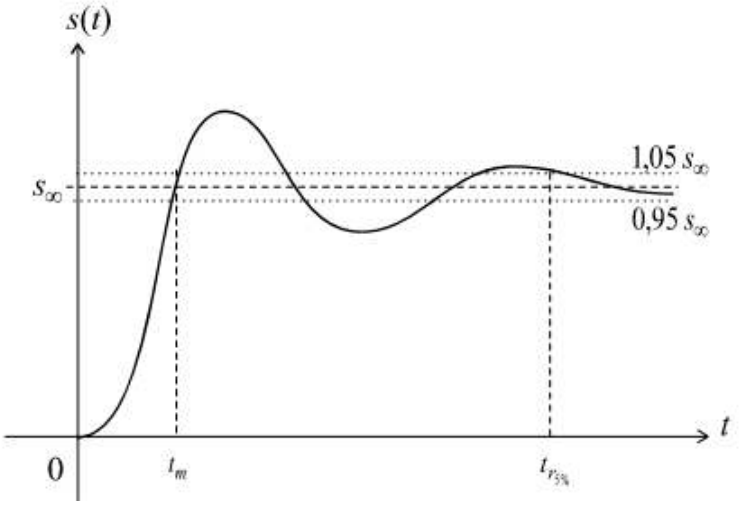
On considère un système bouclé tel que représenté ci-dessous.



Définition : Temps de réponse

C'est le temps que mettra le système pour atteindre un certain pourcentage de sa valeur finale de sortie.

Dans le système considéré, la figure ci-dessous représente la notion très utilisée de temps de réponse à 5%.



Définition : Temps de monté

Il est défini par le temps que met le signal de sortie pour atteindre pour la 1ere fois sa valeur finale.

Le signal peut alors osciller autour de sa valeur finale avec un certain dépassement pendant un certain temps.

La figure ci-dessus représente également cette grandeur.

Remarque

Le temps de montée est un paramètre significatif (quand on peut le définir) de la rapidité d'un système.

2. Temps de montée d'un système du second ordre

Contexte

Soit la FTBO d'un système du 2nd ordre défini par :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Complément : FTBF

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 + K}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{p^2}{(1+K)\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{(1+K)\omega_n} + 1}$$

Remarque

Cette forme est très similaire à la FTBO.

On pose :

- $K_{BF} = \frac{K}{K+1}$
- $\omega_{nBF} = \omega_n . \sqrt{K+1}$
- $\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{K+1}}$

$$H(p) = \frac{K_{BF}}{\frac{p^2}{\omega_{nBF}^2} + \frac{2\xi_{BF} p}{\omega_{nBF}} + 1}$$

Méthode : Détermination du temps de montée

Il faut que $\xi_{BF} < 1$ pour que le phénomène de dépassement se produise.

Si le signal d'entrée est un échelon unitaire, alors s(t) est de la forme :

$$s(t) = K_{BF}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}} e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}t} \sin\left(\omega_{nBF}\sqrt{1-\xi_{BF}^2}\,t + \arccos\frac{\sqrt{(1-\xi_{BF}^2)}}{\xi_{BF}}\right)\right]$$

On peut alors calculer le temps de montée en résolvant :

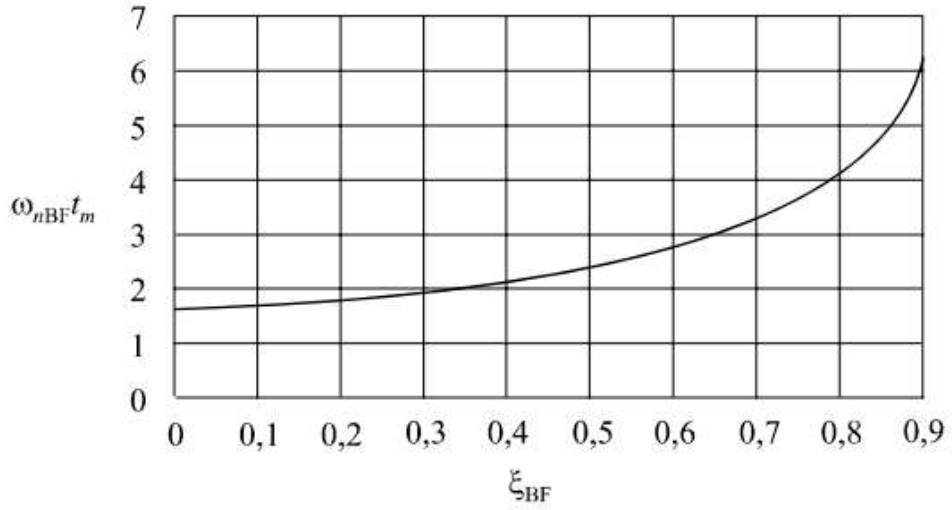
$$s(t_m) = K_{BF}$$

La plus petite valeur obtenue est le temps de montée du signal.

Complément : Équation du temps de montée

$$\omega_{nBF} t_m = \frac{\pi - \arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}{\xi_{BF}}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}$$

Le graphe ci-dessous donne le produit $\omega_{nBF}.t_m = f(\xi_{BF})$:



Remarque

Pour des valeurs courantes du facteur d'amortissement (de 0.2 à 0.8), on a :

$$2 < \omega_{nBF} < 4$$

On prendra comme valeur approchée : $\omega_{nBF}.t_m = 3$

Complément : Intérêt de l'approximation

$$\omega_{nBF} = \omega_n\sqrt{K+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2j\xi\omega}{\omega_n}} \Rightarrow G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \dfrac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

Si on calcule le gain pour $\omega = \omega_n.\sqrt{K+1}$

$$G(\omega_n\sqrt{K+1}) = \frac{K}{\sqrt{(1-K-1)^2 + 4\xi^2(K+1)}}$$

Si $K >> 1$, alors $G\left(\omega_n \sqrt{K+1}\right) \approx 1$

Donc la pulsation en BF est très proche de la pulsation de coupure à 0 dB : $\omega_{nBF} = \omega_n \sqrt{K+1} \approx \omega_{c0}$

Donc : $t_{rf} \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$

3. Conclusion

Fondamental

Le paragraphe précédent fait le lien entre le temps de monté en BF et la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

On retiendra :

- $t_{rf} \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$
- $\omega_{nBF} \approx \omega_{c0}$

Attention

Il ne s'agit que d'une évaluation pas d'un calcul.

Le résultat donne une bonne idée du temps de réponse.

Cela n'est valable que pour des valeurs de $\xi_{BF} \approx 0{,}65$.

Cela n'est valable que pour les systèmes avec $\xi_{BF} < 1$

Il s'agit d'un lien entre le domaine fréquentiel et le domaine temporel.

L'approximation est d'autant plus vraie que K >>1.

Dépassement

IV

1. Dépassement pour un système du second ordre

Contexte

Soit un système de FTBO :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Définition

Dans le cas où $\xi_{BF} < 1$, en réponse à un échelon, le dépassement (en % de la valeur finale) est donné par :

$$d\% = 100 \times e^{\frac{\pi\xi_{BF}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}}$$

Complément : Relation entre marge de phase et dépassement

$$\Delta\varphi = \arctan\frac{2\xi\sqrt{K+1}}{K}$$

Si K >> 1, alors on peut considérer que :

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\xi_{BF}}{\sqrt{K}}$$

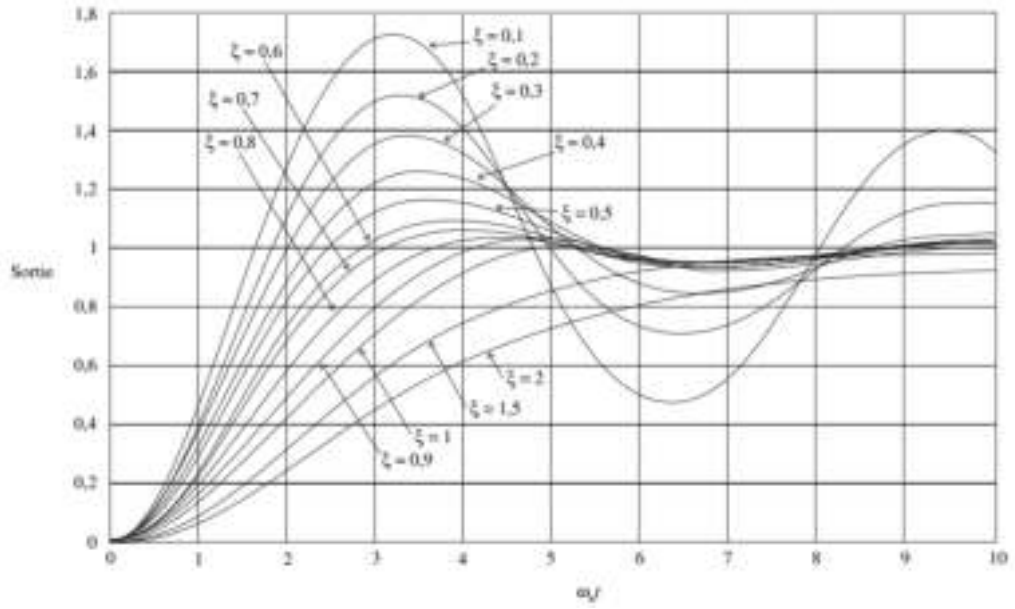
Fondamental : On retiendra :

$$\xi_{BF} = \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$$

Méthode : Approximation du dépassement

$$\Delta\varphi^\circ \to \xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100} \to d\% = 100 \times e^{\left(\frac{\pi.\xi_{BF}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}\right)}$$

Il existe également des abaques pour y lire directement le dépassement à partir du facteur d'amortissement.


Sortie
ωnt
ξ = 0,1
ξ = 0,2
ξ = 0,3
ξ = 0,4
ξ = 0,5
ξ = 0,6
ξ = 0,7
ξ = 0,8
ξ = 0,9
ξ = 1
ξ = 1,5
ξ = 2

Gain et performances

V

1. Gain statique en BO et performances en BF

Fondamental

Augmenter le gain statique (K) réduit la marge de phase et donc la stabilité du système.

Par ailleurs, cette diminution entraîne la diminution de $\xi_{ff} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$ ce qui augmente le dépassement.

Diminuer K, augmente la stabilité et réduit le dépassement mais ralentit la réponse $t_{ra} = \frac{3}{\omega_0\sqrt{K+1}}$ et dégrade sa précision en boucle fermée $\varepsilon_p = \frac{1}{K+1}$.

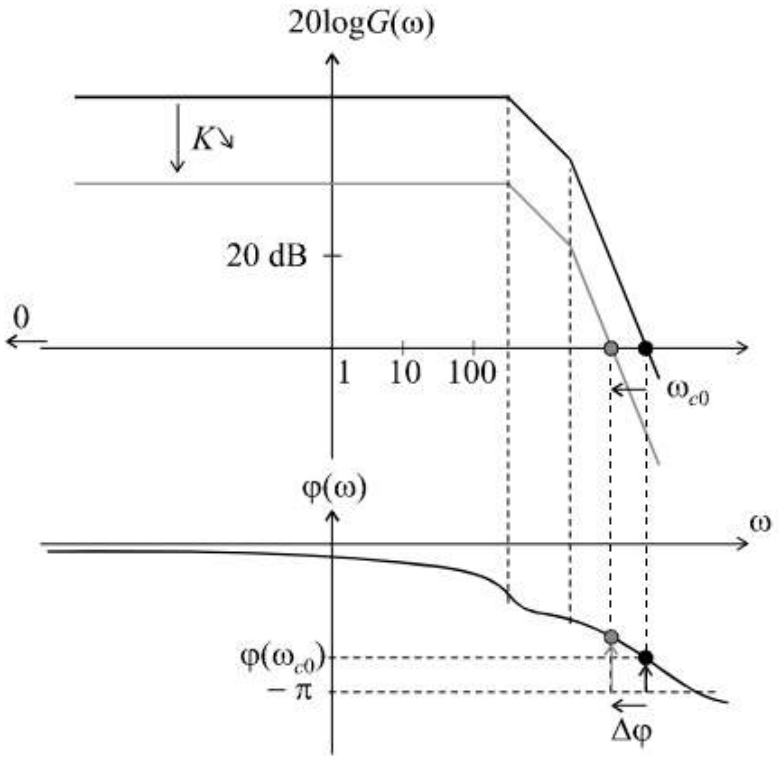
Complément : Gain statique et rapidité

Sur le diagramme de Bode ci-dessous, diminuer K revient à le décaler vers le bas (sans altérer la courbe de phase).

Ce décalage diminue la pulsation de coupure à 0 dB (ω_{c0}).

Si ω_{c0} diminue alors le temps de montée augmente $t_{ra} \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$

Le système est donc plus lent.



Remarque

Décaler le diagramme vers le bas, augmente la marge de phase.

Exemple traité

VI

1. Exemple

Contexte

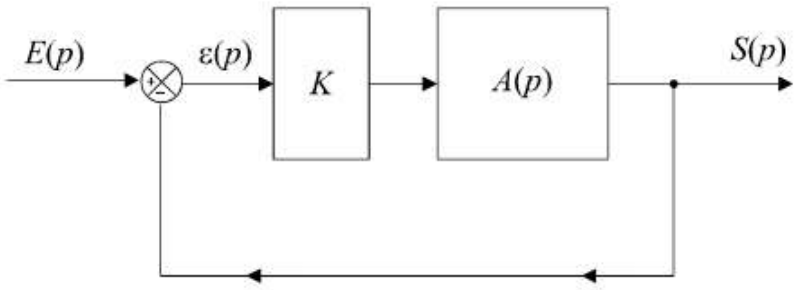
Soit la FTBO d'un système noté $A(p) = \frac{10}{p(p+1)^2}$

Ce système est placé avec un amplificateur K dans une boucle à retour unitaire.

On souhaite régler K pour obtenir en BF :

- une marge de phase supérieure à 45° ;
- un dépassement inférieur à 10%.

On prédira l'ordre de grandeur du temps de montée.



Remarque

Il est inutile ici de parler d'erreur statique puisque la FTBO possède un intégrateur.

2. Étude de la stabilité

Critère de Routh - Calcul de la FTBF

$$G(p) = \frac{10K}{p(p+1)^2} \Rightarrow H(p) = \frac{10K}{p(p+1)^2 + 10K} = \frac{10K}{p^3 - 2p^2 + p + 10K}$$

$$D(p) = p^3 - 2p^2 + p + 10K$$

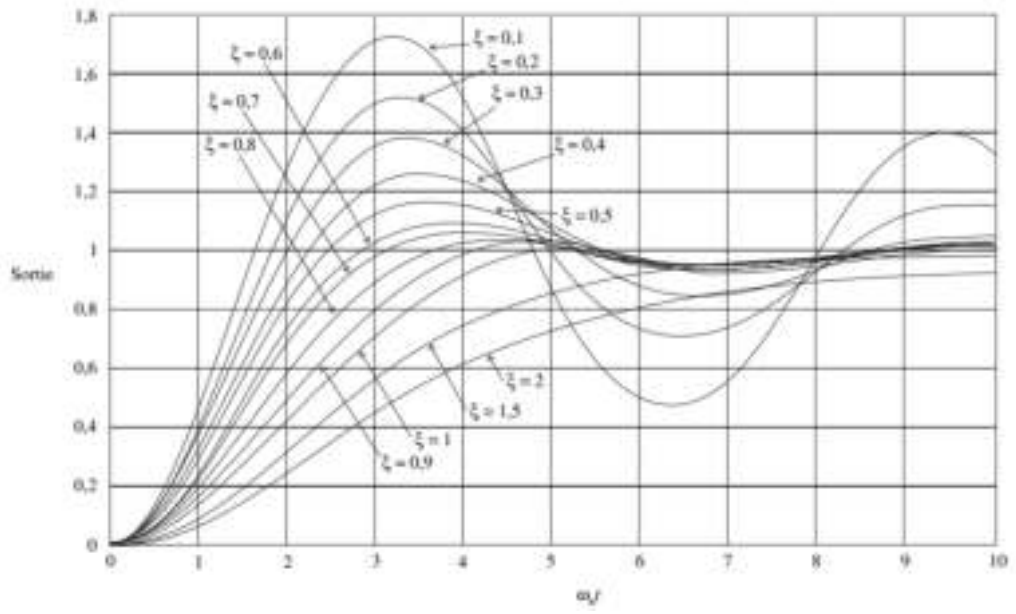
p^3	1	1
p^2	2	10K
p^1	$\frac{2 * 1 \quad 1 * 10K}{2} - \frac{2 \quad 10K}{2}$	0
p^0	10K	0

Pour que le système soit stable, il faut $2 \quad 10K > 0$ soit $K < \frac{1}{5}$

3. Réglage du gain

CdC

$\Delta\varphi > 45^\circ$ et $d < 10\%$



Un dépassement de 10% est obtenu pour $\xi_{BF} = 0.6 \Rightarrow \Delta\varphi^\circ \approx 100\xi_{BF} \approx 60^\circ$

Remarque

Dans ce cas, la marge de phase pour obtenir le dépassement voulu est de 60° ce qui est plus contraignant que la demande initiale.

Calcul du gain

$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$

$\varphi(\omega) = arg\left(\frac{10K}{j\omega(j\omega+1)^2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} - 2arctan\,\omega$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} - 2\arctan\omega_{c0}$$

$$\omega_{c0} = \tan\frac{\pi}{12} \approx 0.27\ rad/s$$

A cette pulsation (ω_{c0}), le gain est égal à 1.

$$G(\omega_{c0}) = \frac{10K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 1)} = 1$$

d'où :

$$K = \frac{1}{10}\omega_{c0}\left(\omega_{c0}^2 + 1\right) \approx 0.03$$

4. Prédiction du temps de montée

L'équation prédictive donne $t_{ra} \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx \frac{3}{0.27} \approx 11s$

Remarque : Conclusion

Ici le réglage est possible car il n'est pas imposé un t_{ra} particulier.

Le réglage aurait été impossible si on avait désiré un $t_{ra} < 5s$ par exemple.

Il n'est pas toujours possible par le réglage unique d'un gain de satisfaire toutes les exigences d'où la nécessité des correcteurs.

Exercices

VII

1. Exercice : Évaluation de la précision d'un système

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{10}{(1+10p)(10+p)}$$

Question

Calculer, en BF, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Indice :

Calculer la FTBF ;

Appliquer les formules de l'erreur de position et de l'erreur de traînage.

On sait que l'absence de pôle nul entraîne une erreur de position constante et une erreur de traînage infinie.

2. Exercice : Évaluation de la précision d'un système

Soit la FTBO suivante :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)^2}$$

Question

Calculer, en BF, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Indice :

Calculer la FTBF ;

Appliquer les formules de l'erreur de position et de l'erreur de traînage.

On sait que la présence d'un pôle nul entraîne une erreur de position nulle et une erreur de traînage constante.

3. Exercice : Réglage de la précision d'un système du deuxième ordre

Soit la FTBO suivante où K > 0, placé dans une boucle à retour unitaire

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^2}$$

Question

Déterminer la valeur de K pour obtenir une erreur de position égale à 5%.

4. Exercice : Évaluation des performances globales d'un système du deuxième ordre

Soit le système dont la FTBO est :

$$G(p) = \frac{100}{(p+1)(p+10)}$$

Question 1

Calculer l'erreur statique

Question 2

Déterminer la marge de phase

Question 3

En déduire la valeur du dépassement en BF

Question 4

Calculer le temps de montée en BF

5. Exercice : Réglage de la rapidité d'un système du second ordre

On considère la FTBO, avec K>0, ci-dessous placée dans une boucle à retour unitaire.

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)}$$

Question 1

Déterminer la valeur de K qui assure un temps de montée égal à 0.1s.

Question 2

Que vaut dans ce cas, la marge de phase ?

Question 3

Que vaut le dépassement en BF ?

6. Exercice : Limitation du dépassement d'un système du troisième ordre

Soit un système dont la FTBO, avec K>0 est donnée par la relation suivante :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+5)^2}$$

Question 1

Déterminer la valeur de K qui assure au système placé dans une boucle unitaire :

- une marge de phase > 45°
- un dépassement en BF < 10%

Question 2

Déterminer dans ces conditions, le temps de montée.

7. Exercice : Optimisation des performances d'un système du troisième ordre

On considère la FTBO suivante, placée dans une boucle à retour unitaire avec K>0, telle que :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^3}$$

Question 1

Déterminer la condition sur K, pour obtenir une marge de phase supérieure à 45°.

Question 2

Déduire de la question précédente :

- Le temps de montée minimal ;
- L'erreur statique minimale.

8. Exercice : Réglage de la rapidité d'un système du troisième ordre

Soit la FTBO ci-dessous où K > 0 placée dans une boucle à retour unitaire.

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2}$$

Question 1

Calculer l'erreur de position en BF.

Indice :

Elle est nulle, la FTBO contient un intégrateur !

Question 2

Déterminer la valeur de K qui permet d'obtenir $t_m = 0.2\ s$

Question 3

Déterminer la marge de phase pour cette valeur de K.

Question 4

Conclure.