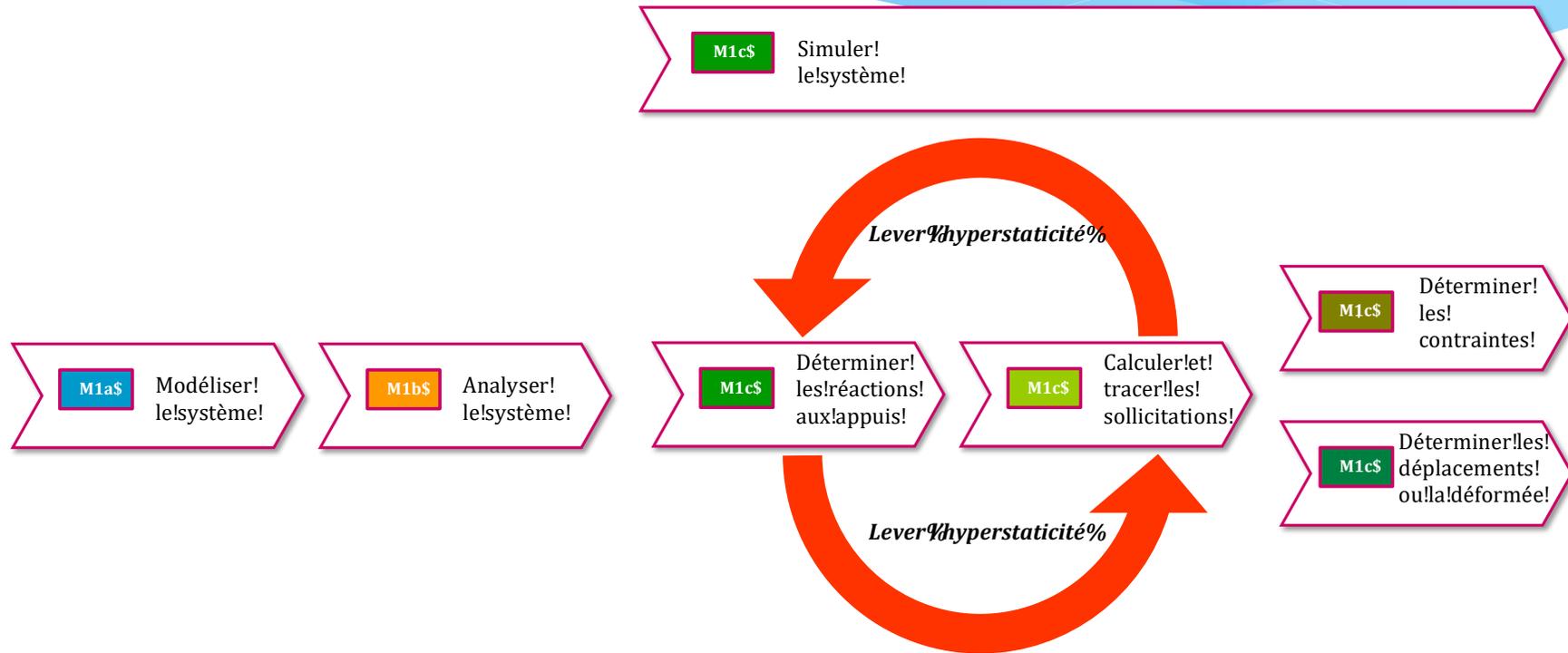


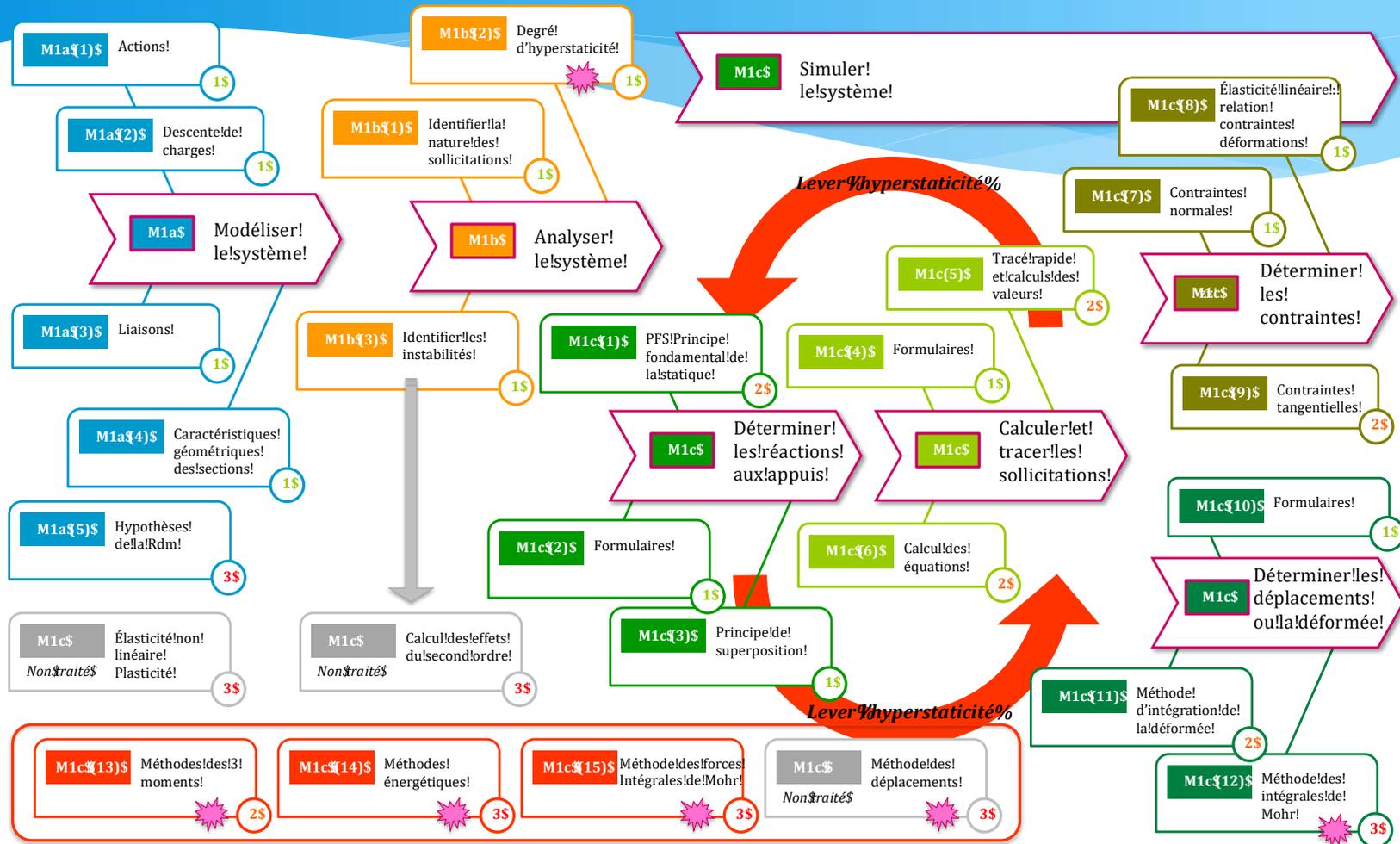
# Mécanique des structures

MODULE M1 (M1a, M1b, M1c)

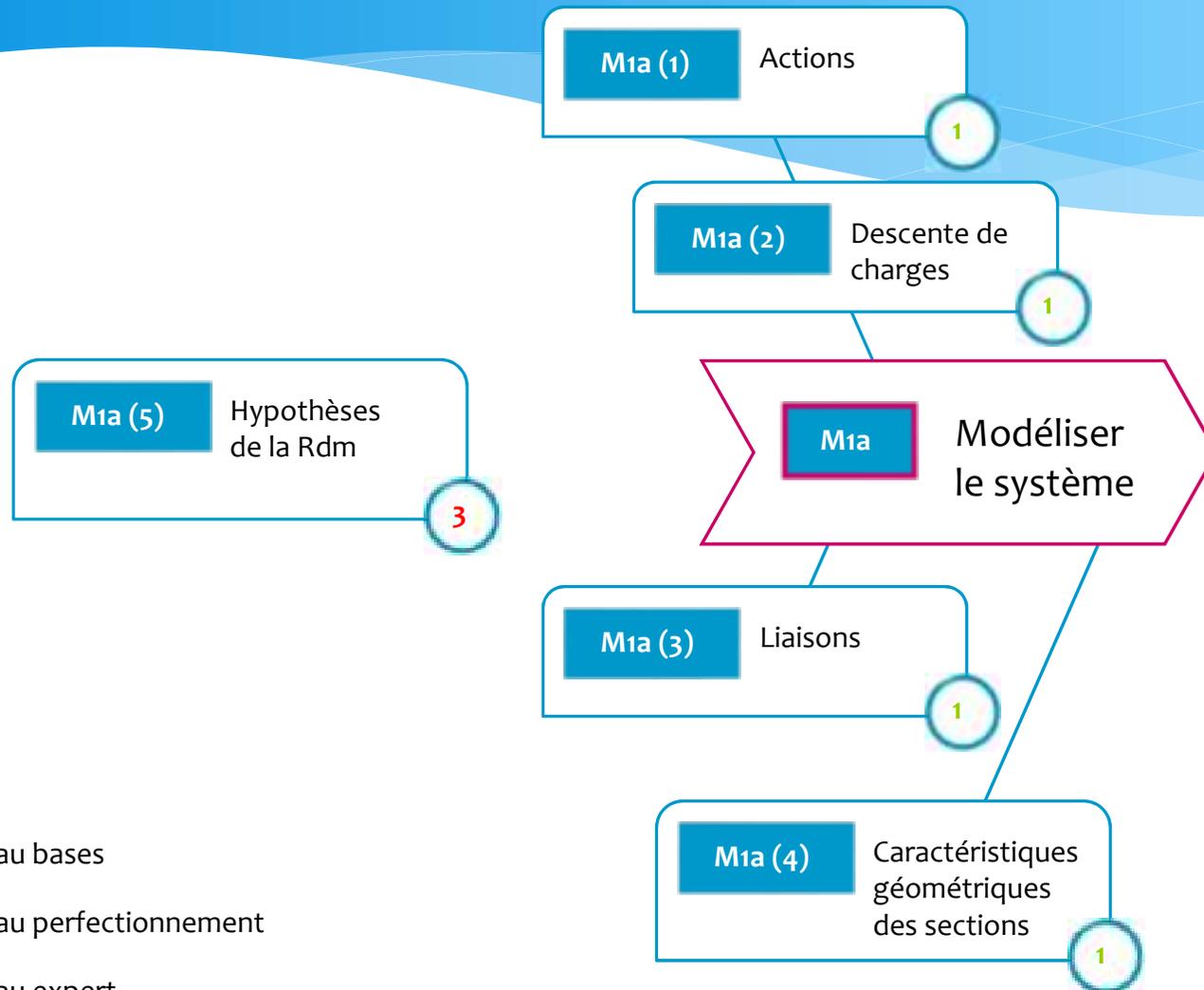
# Sommaire partiel M1



# Sommaire complet M1



# Sommaire M1a



- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

# M1a (1)

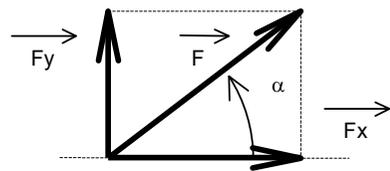
## 2 types d'actions mécaniques

Force [N]

- Un vecteur avec 4 caractéristiques :
- Un point d'application (contact)
  - Une direction (verticale)
  - Un sens (vers le bas)
  - Une intensité (norme de F)



$$\vec{F} = -F$$



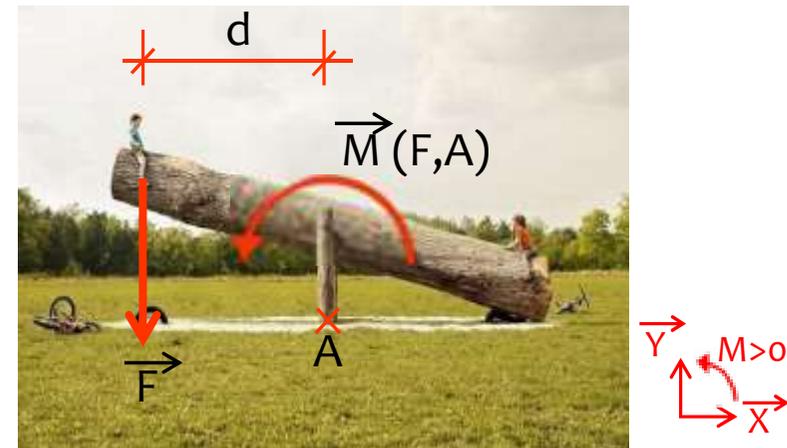
$$F_x = |F \times \cos \alpha| = F \times \cos \alpha$$

$$F_y = |F \times \sin \alpha| = F \times \sin \alpha$$

Moment [N.m]

Un vecteur avec 4 caractéristiques  
(direction perpendiculaire au plan 2D)

Ou sa représentation simplifiée : une flèche courbe dans le plan 2D



$$\vec{M}(F,A) = +F \times d$$

Relation masse [kg] - poids [N] :

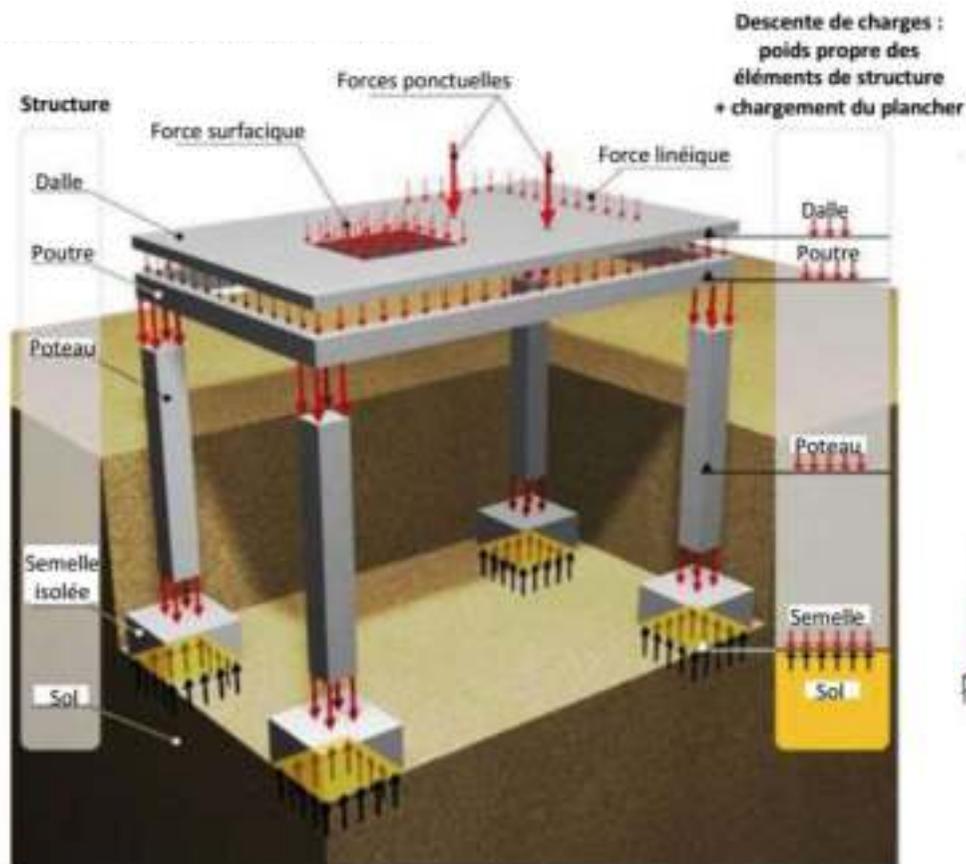
$$\vec{P} = m \times \vec{g}$$

Par simplification dans les calculs, on prendra  $g=10 \text{ m/s}^2$ .

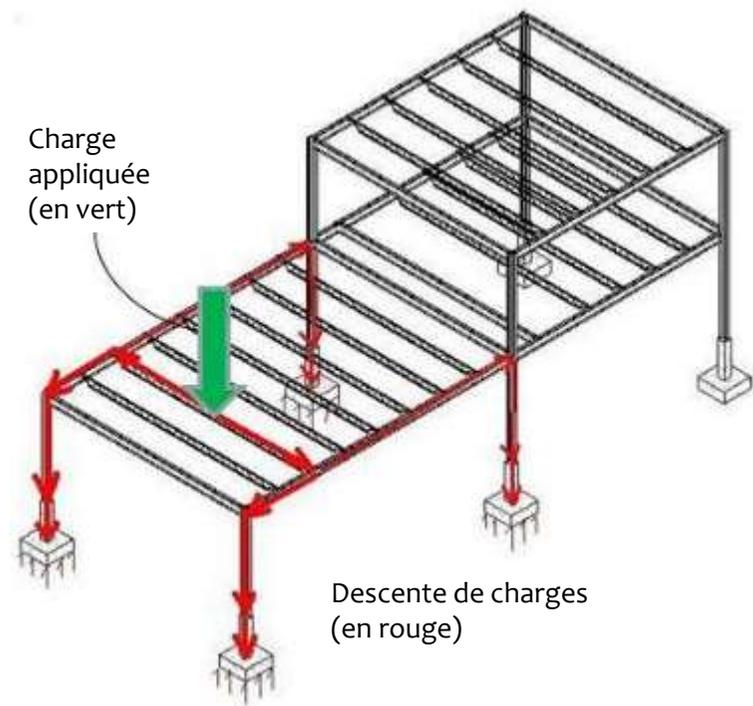
# M1a (2)

## Descente de charges

Exemple de descente de charges sur une structure béton armé



Exemple de descente de charges sur une charpente (métal, bois)



# M1a (2)

## Descente de charges

La mécanique des structures distingue 3 types de charges :

En bâtiment, les unités les plus adaptées aux ordres de grandeur sont le daN et le kN.

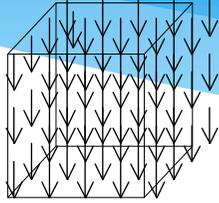
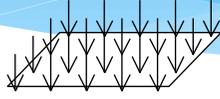
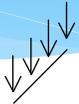
### Analyse dimensionnelle

$$[\text{daN}] / [\text{m}^3] \times [\text{m}] = [\text{daN}] / [\text{m}^2]$$

$$[\text{daN}] / [\text{m}^3] \times [\text{m}^2] = [\text{daN}] / [\text{m}]$$

$$[\text{daN}] / [\text{m}^3] \times [\text{m}^3] = [\text{daN}]$$

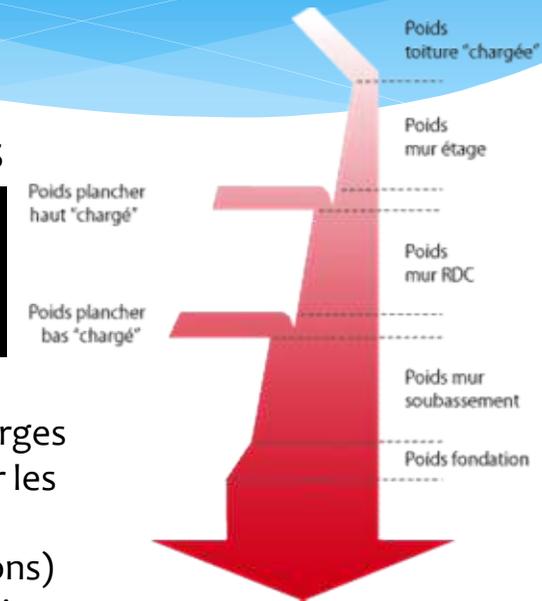
On doit toujours veiller à ce que les dimensions et unités soient homogènes

Force volumique	Force surfacique	Force linéique
Unité : [N/ m <sup>3</sup> ] Newton par mètre cube	Unité : [N/ m <sup>2</sup> ] Newton par mètre carré	Unité : [N/ m] ou [N/ ml] Newton par mètre (linéaire)
		
<p><b>Exemple 1 :</b></p> <p>Poids volumique béton :</p> $\gamma = 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$ <p>On le transforme généralement en force résultante (ponctuelle) : pour l'appliquer en un seul point, au centre de gravité.</p> <p><b>Exemple 4 :</b></p> <p>Pour un volume <math>V = L \times l \times h</math>. Comment passer de la force volumique à la résultante ponctuelle ?</p> $R = \gamma \times V = \gamma \times (L \times l \times h)$ <p>Equation aux dimensions :</p> $\frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times \text{m}^3 = \text{kN}$	<p><b>Exemple 2 :</b></p> <p>Surcharges d'exploitation réglementaires Lycée, parties communes :</p> $q = 500 \frac{\text{daN}}{\text{m}^2}$ <p><b>Exemple 5 :</b></p> <p>Pour une plaque d'épaisseur <math>h</math>. Comment passer de la force volumique à la force surfacique équivalente (résultante surfacique) ?</p> $r = \gamma \times h$ <p>Equation aux dimensions :</p> $\frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times \text{m} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ <p><b>Exemple 6 :</b></p> <p>La plaque a des dimensions <math>L \times l</math>. Comment passer de la force volumique à la résultante ponctuelle ?</p> $R = r \times (L \times l)$ <p>Equation aux dimensions :</p> $\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times \text{m}^2 = \text{kN}$	<p><b>Exemple 3 :</b></p> <p>Poutre métallique IPE400</p> $\text{Masse}_{\text{linéique}} = 66,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ <p>D'où :</p> $g = 66,3 \frac{\text{daN}}{\text{m}}$ <p>Attention : <math>\bar{g}</math> (la force linéique) est utilisé pour les charges permanentes et n'a rien à voir avec <math>\bar{g}</math> (10kN/kg), l'accélération gravitationnelle.</p>

## Descente de charges

La réglementation (Eurocodes) distingue 2 familles de charges

Actions <u>fixes</u> dites permanentes	Actions <u>variables</u> dites d'exploitation	Actions <u>variables</u> dites climatiques	Actions <u>variables</u> dites accidentelles
Le poids propre noté <b>G</b>	Les charges d'exploitation notées <b>Q</b>	La neige notée <b>Sn</b> Le vent noté <b>W</b>	Impact accidentelle noté <b>A</b> Séisme notée <b>AE</b>



La descente de charges consiste à identifier les éléments porteurs (jusqu'aux fondations) et à cumuler les actions qui s'appliquent dessus.

**exemples**  
**ELU : 1,35 G + 1,5 Q + Sn ou W**  
**ELS : G + Q + Sn ou W**

Il faut distinguer dans ce cumul les actions des différentes familles car la réglementation impose des combinaisons d'actions avec des coefficients différents. Il existe 2 cas d'étude : **ELU** (Etats Limites Ultimes, pour le dimensionnement avant la ruine), et **ELS** (Etats Limites de Service, vérification vis à vis de la durabilité)

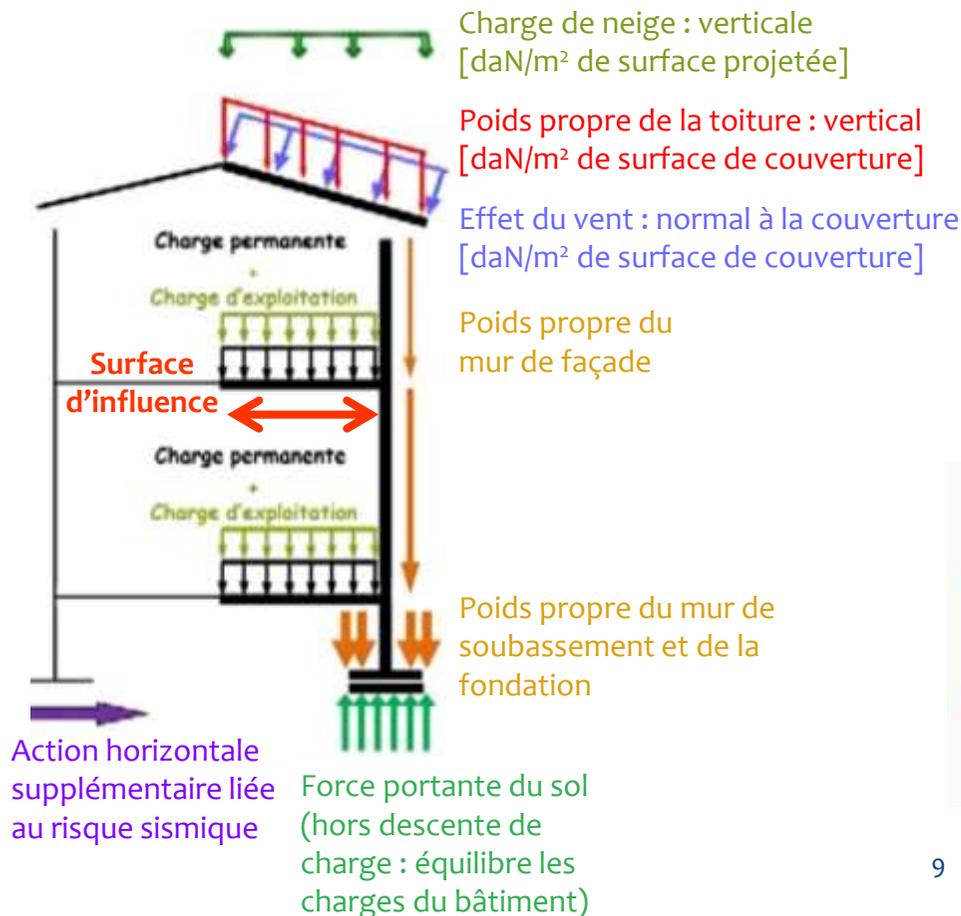


# M1a (2)

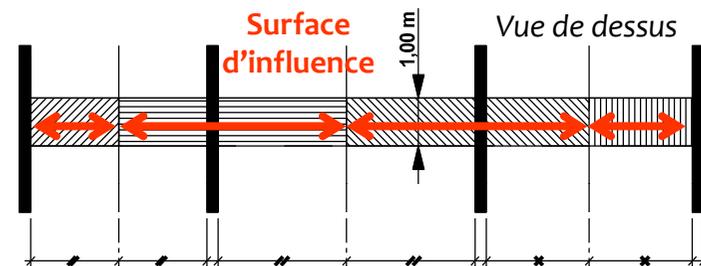
## Descente de charges

On distingue 2 types de descente de charges :

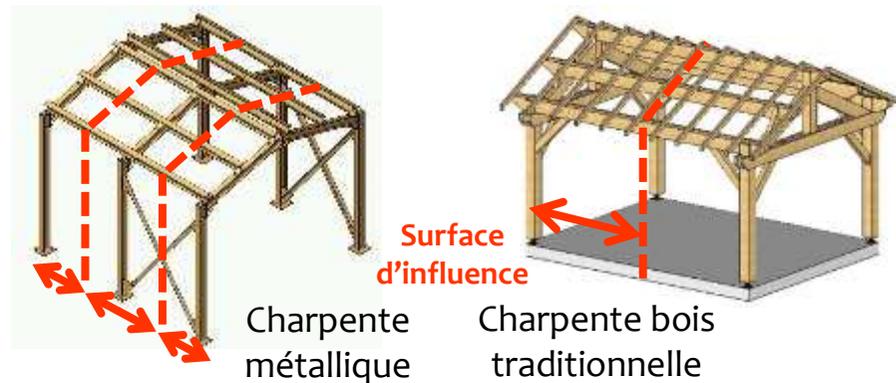
### 1- sur une bande d'ouvrage de 1ml



Variante pour la bande de 1ml : structure à planchers et porteurs transversaux parallèles (refends ou poutres)



Variante : en charpente, au lieu de prendre une bande de 1m, on utilise la 1/2 distance entre fermes.



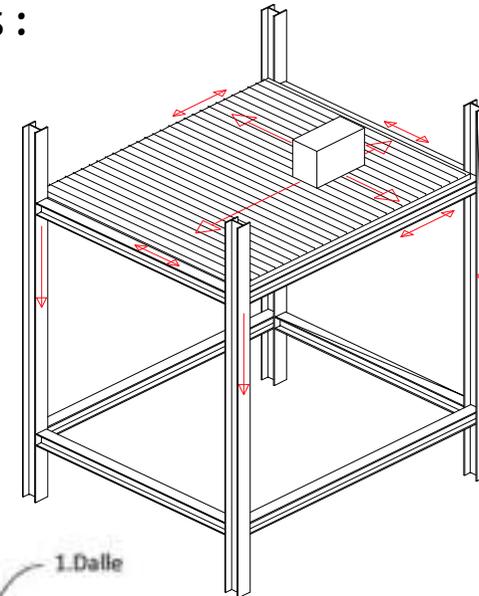
## Descente de charges

On distingue 2 types de descente de charges :

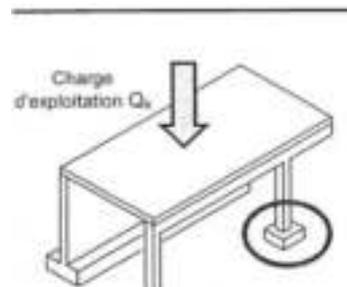
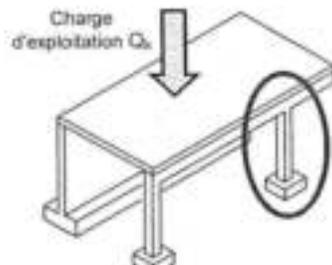
### 2- élément par élément

#### Exemple 1 : structure poteaux-poutres

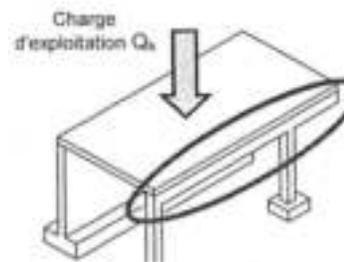
Chaque élément de structure ramène ses actions de liaison sur l'élément qui le porte.



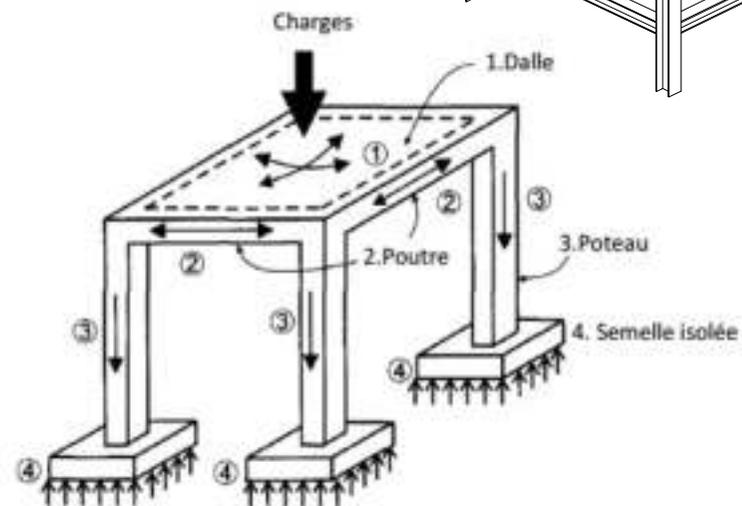
La poutre reprend les charges amenées par le plancher et son poids propre.



Le poteau reprend une partie des actions amenées par la poutre et son poids propre.



La semelle isolée reprend les actions reprises par le poteau et son poids propre.



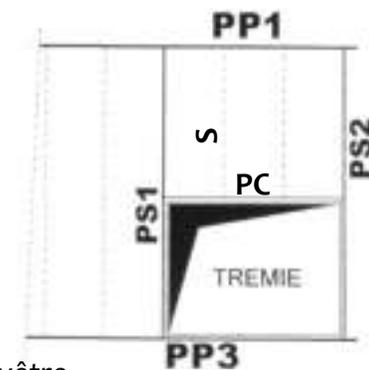
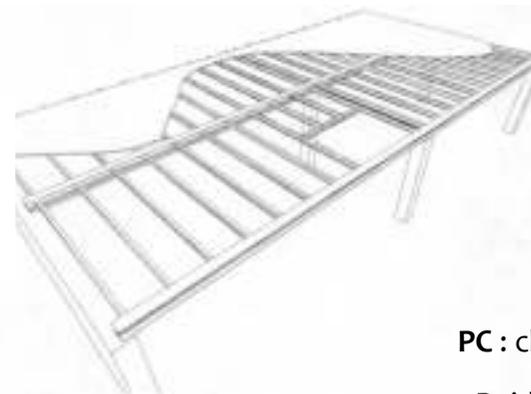
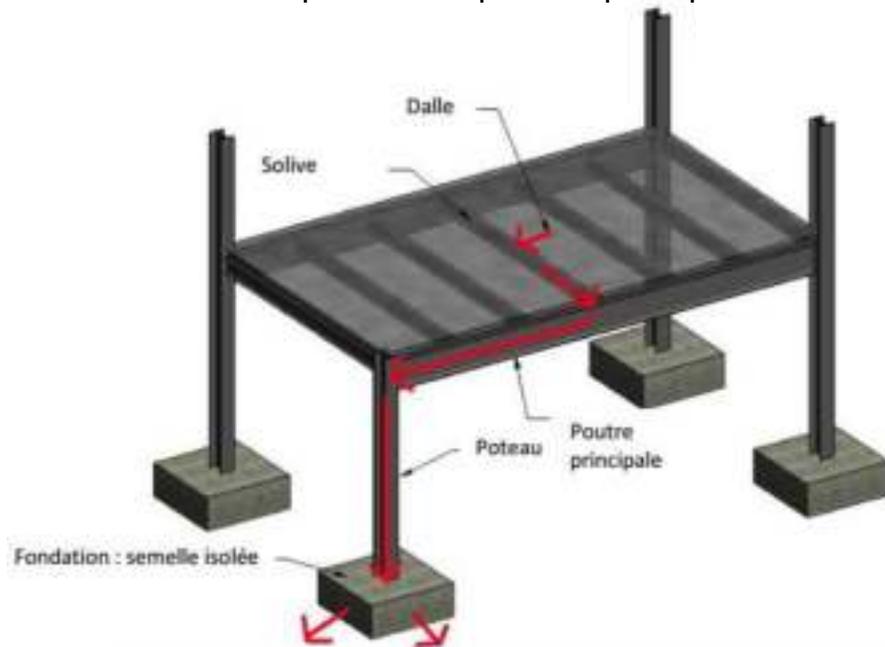
# M1a (2)

## Descente de charges

### 2- élément par élément

#### Exemple 2 : système de poutrais d'un plancher

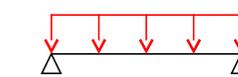
Le schéma ci-contre représente un plancher à solivage : les charges de la dalle passent sur les solives puis sur les poutres principales.



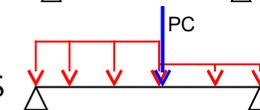
PC : chevêtre

Poids propres du revêtement, du plancher, de la solive et les charges d'exploitation d'un bureau

Solive S

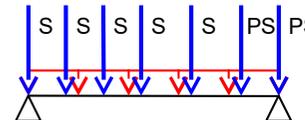


Poutre secondaire PS



Dito + PC + poids propre de PS

Poutre principale PP



S + PS + poids propre de PP

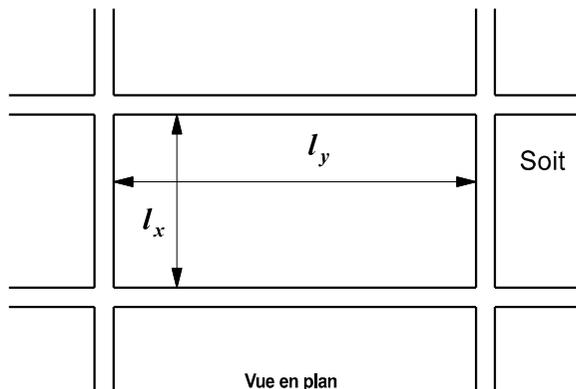
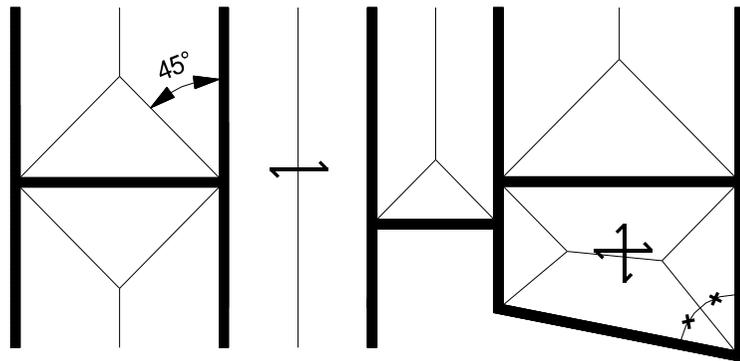
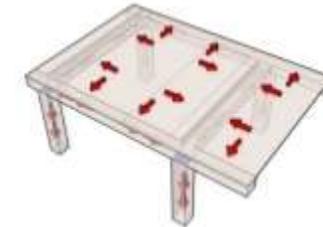
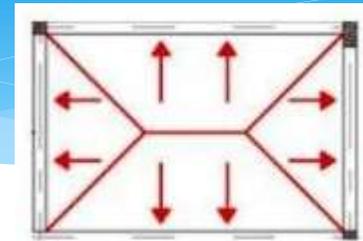
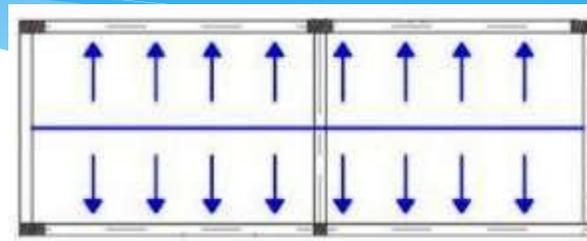
# M1a (2)

## Descente de charges Surfaces d'influence

Le plancher peut porter sur 2 ou 4 côtés (lignes de rupture à 45°).

Les dalles de forme allongée portent dans un seul sens : les deux poutres les plus rapprochées (plus petite portée) reprennent toutes les charges.

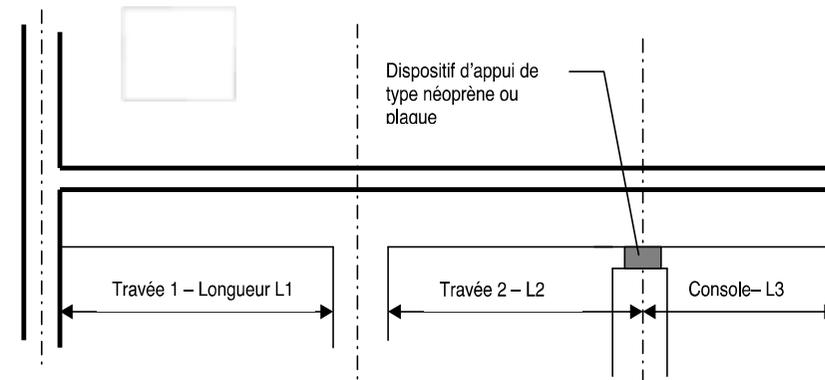
Les dalles de forme plus carrée portent dans un seul sens : les deux poutres les plus rapprochées (plus petite portée) reprennent toutes les charges.



Soit  $\alpha = \frac{l_x}{l_y}$  avec  $l_x$ , petite portée et  $l_y$ , grande portée.

- Pour  $\alpha < 0,50$  les dalles portent dans un seul sens suivant la plus petite dimension  $l_x$ .
- Pour  $0,50 \leq \alpha \leq 1$ , les dalles portent dans les deux directions  $l_x$  et  $l_y$ .

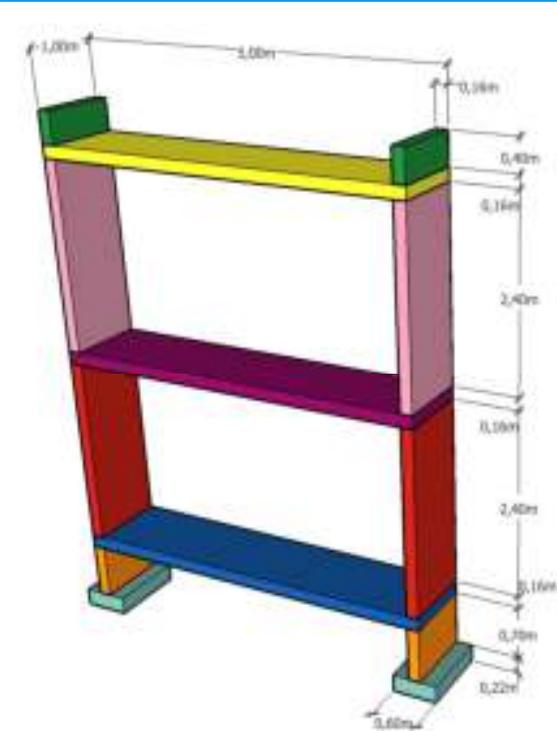
Détermination des longueurs de travée des poutres : à l'axe en charpente ou au nu des appuis en BA (béton armé).



# M1a (2)

## Descente de charges

Exemple n°1 : descente de charges sur une bande de bâtiment de 1m



Charges permanentes :

- Poids volumique béton armé (BA) : 2500 daN/m<sup>3</sup>
- Poids surfacique toiture-terrasse végétalisée : 200 daN/m<sup>2</sup>

Charges variables :

- Neige :  $S_n=45$  daN/m<sup>2</sup>
- Exploitation :  $q=150$  daN/m<sup>2</sup>

Élément de structure	Chargement	Catégorie	L	l	h	S	V	Charge surfacique	Charge volumique	Charge Résultante G	Charge Résultante Q	Charge Résultante S <sub>n</sub>
			m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	daN/m <sup>2</sup>	daN/m <sup>3</sup>	daN	daN	daN
Semelle filante	permanente	G	1	0,30	0,22		0,066		2500	165		
Mur soubassement	permanente	G	1	0,16	0,70		0,112		2500	280		
Dalle portée RdC	permanente	G	1	2,50	0,16		0,400		2500	1000		
	exploitation	Q	1	2,34		2,34		150			351	
Voile RdC	permanente	G	1	0,16	2,40		0,384		2500	960		
Plancher haut RdC	permanente	G	1	2,50	0,16		0,400		2500	1000		
	exploitation	Q	1	2,34		2,34		150			351	
Voile R+1	permanente	G	1	0,16	2,40		0,384		2500	960		
Plancher haut R+1	permanente	G	1	2,50		2,5		200		500		
	variable : neige	S <sub>n</sub>	1	2,34		2,34		45				105
Acrotère	permanente	G	1	0,16	0,40		0,064		2500	160		
<b>TOTAL</b>										<b>5025</b>	<b>702</b>	<b>105</b>
										<b>5832</b>		

## M1a (2)

### Descente de charges

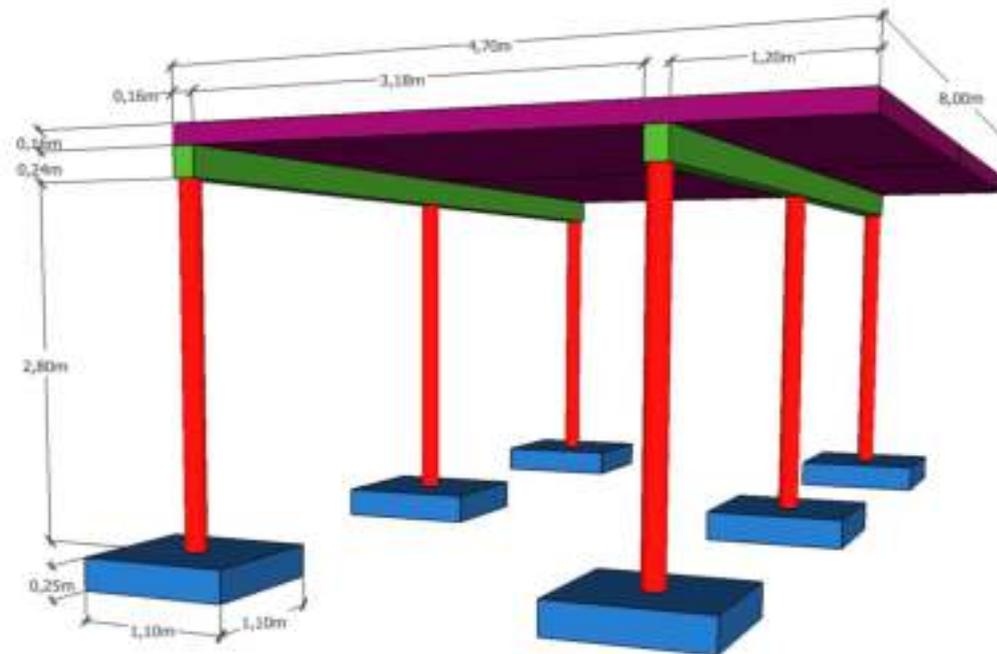
#### Exemple n°2 : descente de charges sur une structure poteaux-poutres BA

Charges permanentes :

- Poids volumique béton armé (BA) :  $2500 \text{ daN/m}^3$

Charges variables :

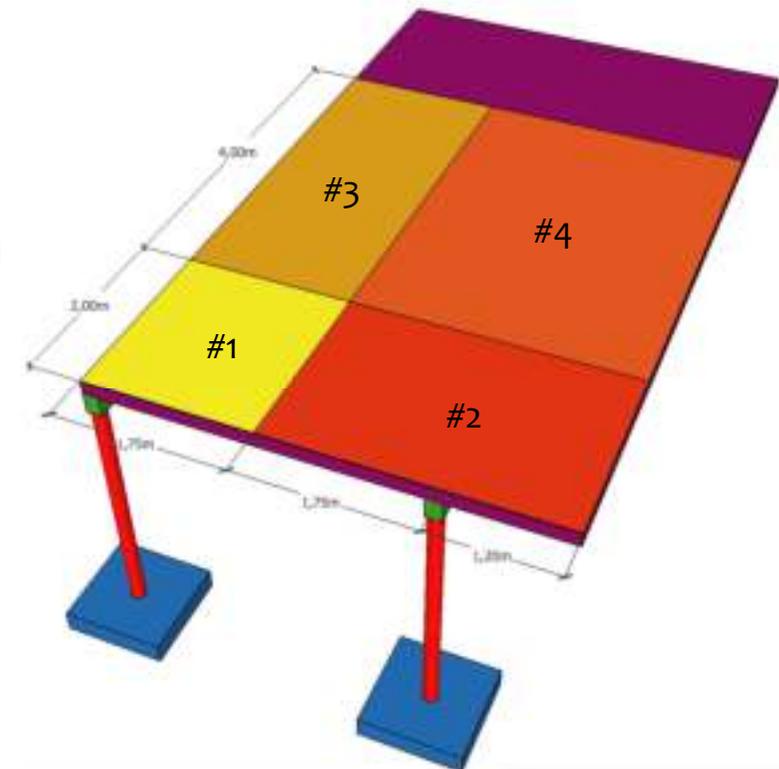
- Exploitation :  $q=250 \text{ daN/m}^2$



#### Surfaces de reprise des 4 fondations

On aurait pu faire une descente de charge élément par élément (poutre continue sur 3 poteaux).

On choisit dans cet exemple la méthode réglementaire avec les surfaces de reprise par poteau.



# M1a (2)

## Descente de charges

Exemple n°2 :

Potiau de rive #1 gauche											
Élément de structure	Chargement	Catégorie	l	l ou e	h	S	V	Charge surfacique	Charge volumique	G	Q
			m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	daN/m <sup>2</sup>	daN/m <sup>3</sup>	daN	daN
Plancher haut RdC travée	exploitation	Q	2	1,75		3,5		250			875,0
Plancher haut RdC travée	permanente	G	2	1,75	0,16		0,56		2500	1400,0	
Poutre	permanente	G	2	0,24	0,18		0,077		2500	192,0	
Poteau circulaire	permanente	G	2,8	0,16			0,020		2500	50,3	
Semelle isolée	permanente	G	1,1	1,10	0,25		0,303		2500	756,3	
<b>TOTAL</b>										<b>2396,3</b>	<b>875</b>
Potiau de rive #2 droite											
Élément de structure	Chargement	Catégorie	l	l ou e	h	S	V	Charge surfacique	Charge volumique	G	Q
			m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	daN/m <sup>2</sup>	daN/m <sup>3</sup>	daN	daN
Plancher haut RdC travée	exploitation	Q	2	1,75		3,5		250			875,0
Plancher haut RdC balcon	exploitation	Q	2	1,20		2,4		250			600,0
Plancher haut RdC travée	permanente	G	2	2,95	0,18		0,944		2500	2360,0	
Poutre	permanente	G	2	0,24	0,18		0,077		2500	192,0	
Poteau circulaire	permanente	G	2,8	0,16			0,020		2500	50,3	
Semelle isolée	permanente	G	1,1	1,10	0,25		0,303		2500	756,3	
<b>TOTAL</b>										<b>3358,3</b>	<b>1475</b>
Potiau intermédiaire #3 gauche											
Élément de structure	Chargement	Catégorie	l	l ou e	h	S	V	Charge surfacique	Charge volumique	G	Q
			m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	daN/m <sup>2</sup>	daN/m <sup>3</sup>	daN	daN
Plancher haut RdC travée	exploitation	Q	4	1,75		7		250			1750,0
Plancher haut RdC travée	permanente	G	4	1,75	0,16		1,12		2500	2800,0	
Poutre	permanente	G	4	0,24	0,18		0,154		2500	384,0	
Poteau circulaire	permanente	G	2,8	0,16			0,020		2500	50,3	
Semelle isolée	permanente	G	1,1	1,10	0,25		0,303		2500	756,3	
<b>TOTAL</b>										<b>3990,3</b>	<b>1750</b>
Potiau intermédiaire #4 droite											
Élément de structure	Chargement	Catégorie	l	l ou e	h	S	V	Charge surfacique	Charge volumique	G	Q
			m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	daN/m <sup>2</sup>	daN/m <sup>3</sup>	daN	daN
Plancher haut RdC travée	exploitation	Q	4	1,75		7		250			1750,0
Plancher haut RdC balcon	exploitation	Q	4	1,20		4,8		250			1200,0
Plancher haut RdC travée	permanente	G	4	2,95	0,18		1,888		2500	4720,0	
Poutre	permanente	G	4	0,24	0,18		0,154		2500	384,0	
Poteau circulaire	permanente	G	2,8	0,16			0,020		2500	50,3	
Semelle isolée	permanente	G	1,1	1,10	0,25		0,303		2500	756,3	
<b>TOTAL</b>										<b>5910,3</b>	<b>2950</b>

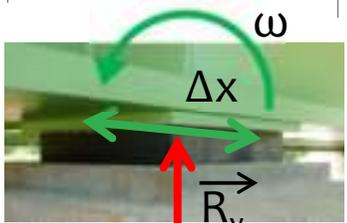
# M1a (3)

## 3 types de liaisons (2D)

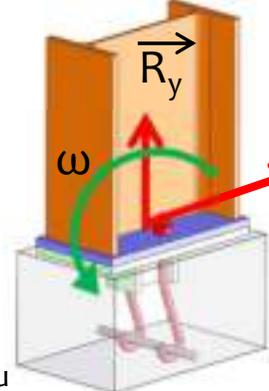
	Appui simple	Articulation (appui double, rotule)	Encastrement
ddl (degré de liberté)	2 $(\Delta x, \Delta y, \omega)$	1 $(\Delta x, \Delta y, \omega)$	0 $(\Delta x, \Delta y, \omega)$
Réactions d'appui	1 $(\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{M})$	2 $(\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{M})$	3 $(\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{M})$

$\Delta x, \Delta y$  : 2 translations  
 $\omega$  : 1 rotation

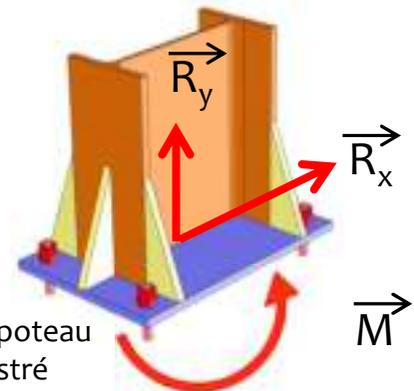
Nb ddl  
+ Nb réactions  
d'appui  
= 3



Appareil d'appui de pont fretté



Pied de poteau articulé



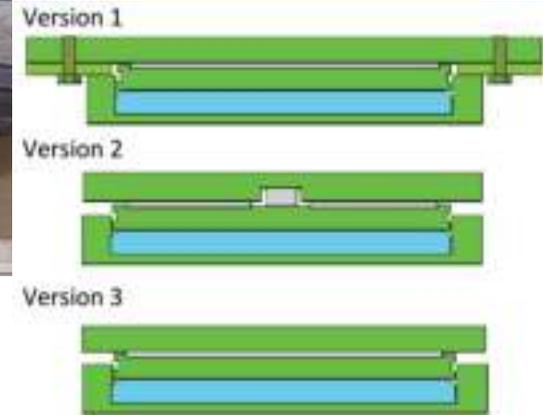
Pied de poteau encastré

Remarque : la réaction d'appui peut être dessinée vers ou à partir du point d'application.

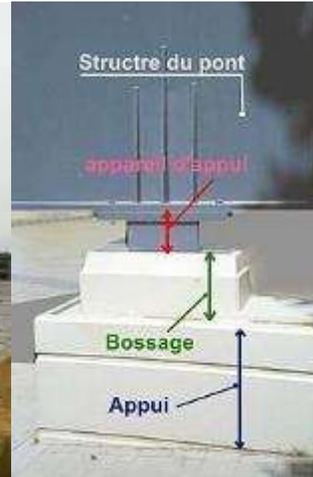
# M1a (3)

## 3 types de liaisons (2D)

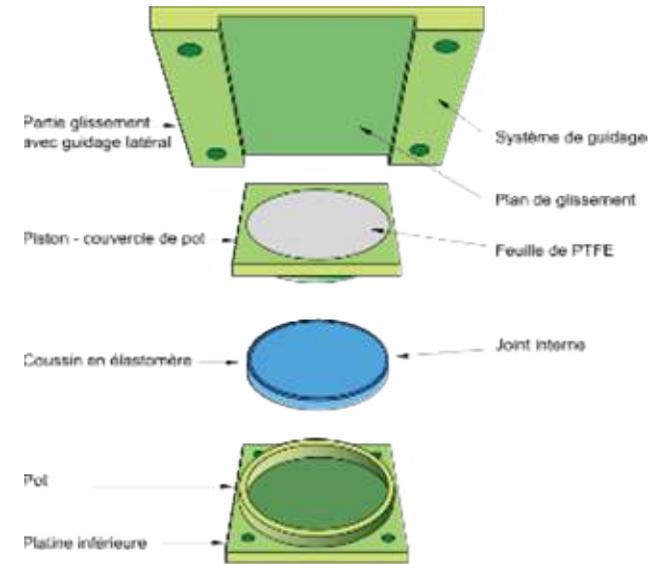
Appareils d'appuis de pont  
(2D transversale et 2D longitudinale)



Ils doivent laisser la dilatation libre, tout en empêchant le déplacement général du tablier.



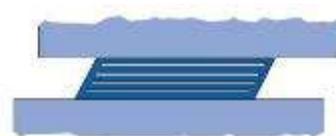
Appareil d'appui à pot pour tablier de pont



Appareil d'appui en élastomère fretté pour tablier de pont



FROTTEMENT PAR FLECHISSEMENT



DEPLACEMENT PAR DILATATION

Tous déplacements autorisés	Déplacement transversal autorisé	Tous déplacements autorisés
Déplacement longitudinal autorisé	Point fixe	Déplacement longitudinal autorisé

# M1a (4)

## Caractéristiques géométriques des sections

Voici des exemples de sections de caractéristiques géométriques différentes :

Poutres en matériaux composites (bois/bois, bois/acier) :



Finnjoist (de Metsäwood)



Nailweb



Posi (de Mitek)

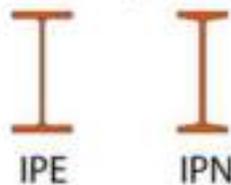
Bois massif (BM)



Lamellé-collé (LC)



Profilés métalliques laminés à chaud :



Profilés en I



Profilés en H



Profilés en U



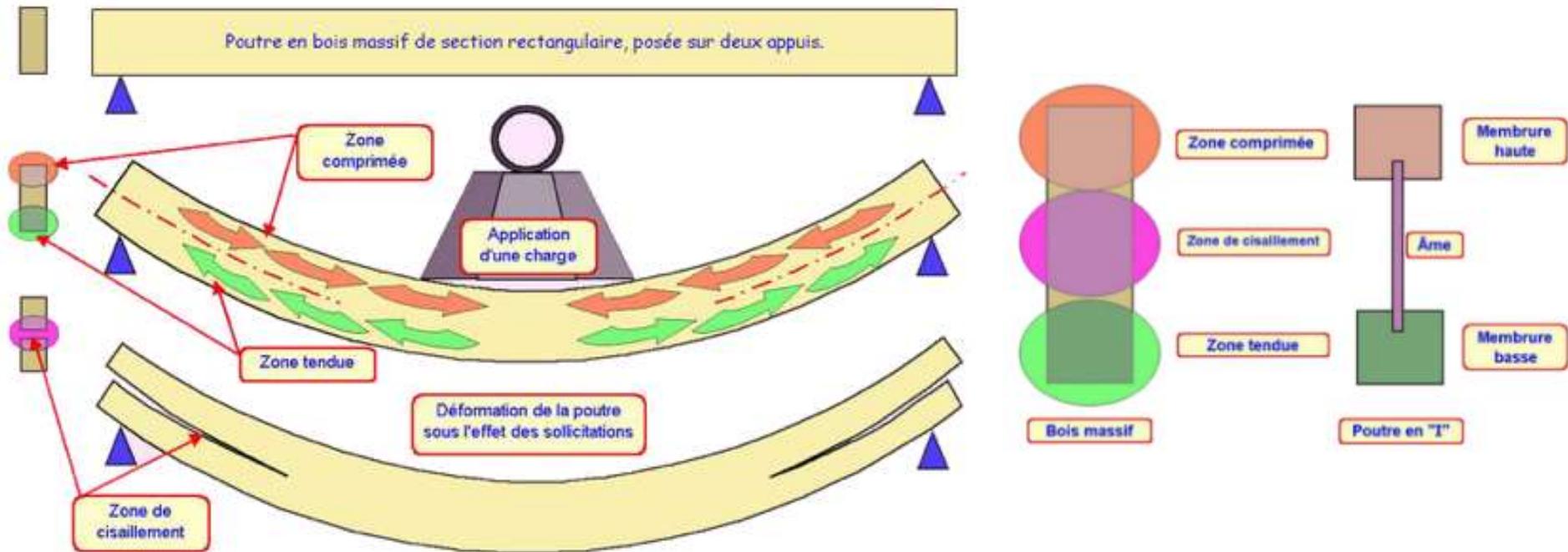
Cornières à ailes égales et inégales

PRS : profilé reconstitué soudé



# M1a (4)

## Caractéristiques géométriques des sections

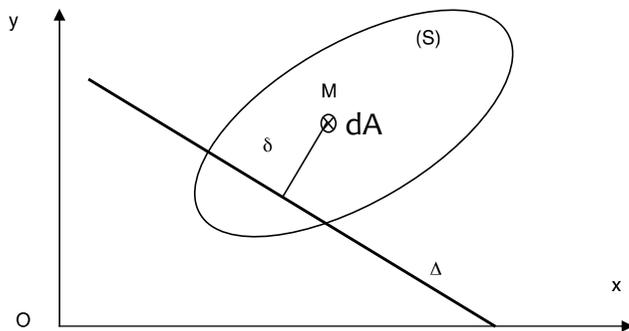


On peut économiser la matière en la localisant là où elle est la plus utile dans la section. Les membrures supérieure et inférieure d'une poutre en I reprennent la compression et la traction dans la section ; l'âme reprend le cisaillement.

# M1a (4)

## Caractéristiques géométriques des sections

### Définitions



#### A Moment statique \*

$$m_{\Delta} = \iint_S \delta \cdot dA$$

où  $\delta$  est la distance du point M à l'axe  $\Delta$

$$m_x = \iint_S y \cdot dA \quad \text{et} \quad m_y = \iint_S x \cdot dA$$

#### B Moment quadratique \* (moment d'inertie de flexion)

$$I_{\Delta} = \iint_S \delta^2 dA$$

$$I_x = \iint_S y^2 dA \quad \text{et} \quad I_y = \iint_S x^2 dA$$

\* : voir pages suivantes pour les calculs

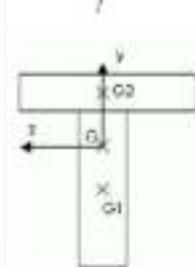
### Repères d'une poutre

Le repère d'une section de poutre est désormais désigné par  $(G, \vec{y}, \vec{z})$  (figure 1).!

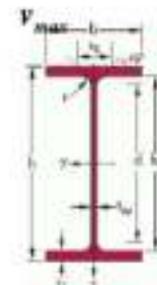
A ne pas confondre avec le repère  $(G, \vec{y}, \vec{z})$  proposé par l'OTUA pour les profilés métalliques (figure 2).

Auparavant, on utilisait le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y})$  (figure 3) mais il est plutôt réservé pour le sens longitudinal de la poutre (figure 4).!

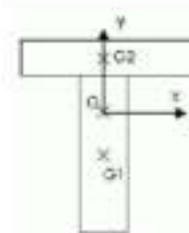
Au début des calculs, comme on ne sait pas où se situe le CdG, on utilise un repère temporaire  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  (figure 5).!



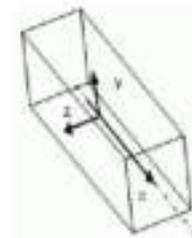
(figure 1)



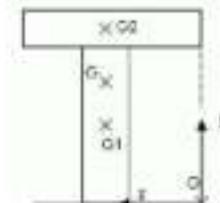
(figure 2)



(figure 3)



(figure 4)



(figure 5)

#### C Module de résistance élastique à la flexion

$$W_{el,z,min} = \frac{I_{Gz}}{v_{max}}$$

#### D $v_{max}$

Distance du C. d. G. de la section droite à la fibre extrême la plus éloignée.

Pour un rectangle :  $h/2$

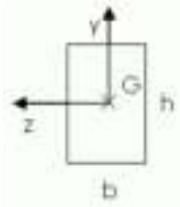
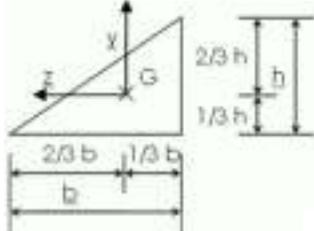
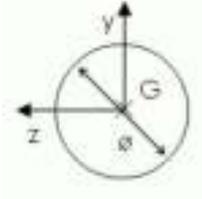
#### E Rayon de giration

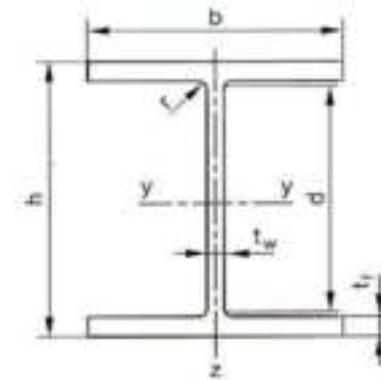
$$i_z = \sqrt{\frac{I_{Gz}}{A}}$$

# M1a (4)

## Caractéristiques géométriques des sections

Formulaire (surfaces et moments quadratiques des géométries de base)

		
$A = b \times h$	$A = \frac{b \times h}{2}$	$A = \frac{\pi \times \phi^2}{4} = \pi \times R^2$
$I_{Gz} = \frac{b \times h^3}{12} \quad I_{Gy} = \frac{h \times b^3}{12}$	$I_{Gz} = \frac{b \times h^3}{36} \quad I_{Gy} = \frac{h \times b^3}{36}$	$I_{Gz} = I_{Gy} = \frac{\pi \times \phi^4}{64}$



**Exemple : HEA**

$I_y$  : moment quadratique

$W_{el,y}$  : module de résistance élastique à la flexion

$i_y$  : rayon de giration

$W_{pl,y}$  : module de résistance plastique à la flexion

$A_{vz}$  : aire de cisaillement

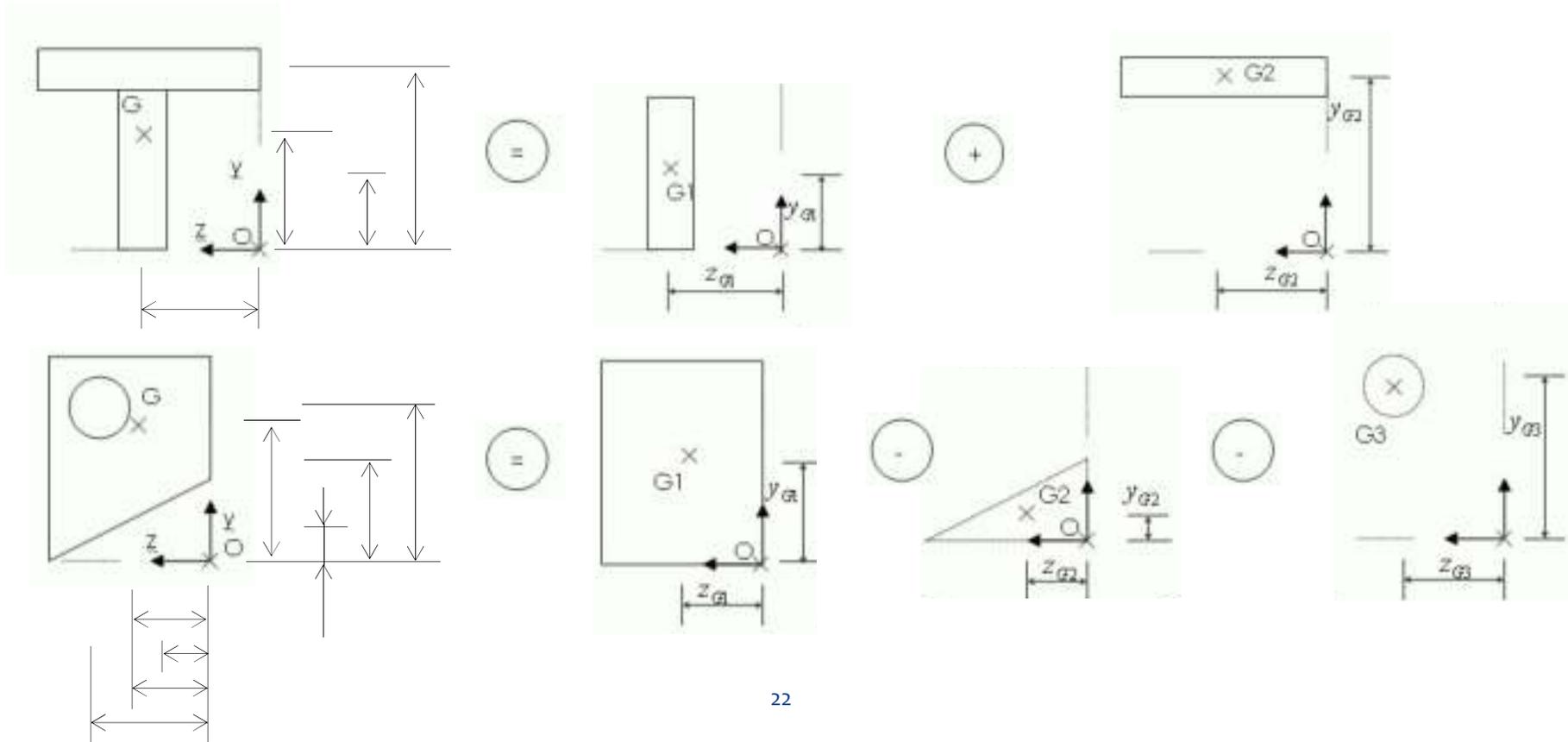
## Formulaire OTUA (profilés métalliques)

	Dimensions						Masse par mètre P kg/m	Aire de la section Aire de cm <sup>2</sup>	Surface de peinture		Caractéristiques de calcul									
	h mm	b mm	t <sub>w</sub> mm	t <sub>f</sub> mm	r mm	d mm			m <sup>2</sup> /m	m <sup>2</sup> /t	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	W <sub>pl,y</sub> cm <sup>3</sup>	A <sub>vz</sub> cm <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	W <sub>pl,z</sub> cm <sup>3</sup>	A <sub>vy</sub> cm <sup>2</sup>
HEA 100	96	100	5.0	8.0	12	56	16.7	21.2	0.561	33.68	349.2	72.8	4.06	83.0	7.6	133.8	26.8	2.51	41.1	16.9
HEA 120	114	120	5.0	8.0	12	74	19.9	25.3	0.677	34.06	606.2	106.3	4.89	119.5	8.5	230.9	38.5	3.02	58.9	20.1

## Caractéristiques géométriques des sections

### Cas des sections composées

Découpage en surfaces élémentaires - Cotation des centres de gravité C.d.G.



# M1a (4)

## Caractéristiques géométriques des sections

Utilisation du moment statique

$$A \times z_G = A_1 \times z_{G1} + A_2 \times z_{G2}$$

$$z_G = (A_1 \times z_{G1} + A_2 \times z_{G2}) / A$$

$$z_G = (S_1 + S_2) / A$$

Calcul du moment quadratique d'une forme élémentaire

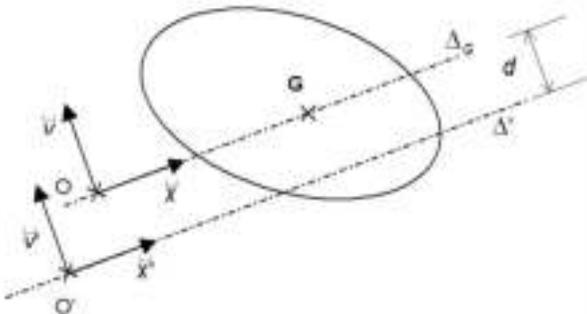
Par exemple pour un rectangle

$$A_1 = b \cdot h$$

$$I'_{G1y} = b \cdot h^3 / 12$$

$$I'_{G1z} = h \cdot b^3 / 12$$

Théorème de Huygens



Pour déduire le moment quadratique d'une surface, par rapport à n'importe quel axe, à partir d'un moment quadratique connu

Intérêt du moment statique (noté S) :  
détermination de la position du C.d.G. ( $y_G$  et  $z_G$ )

Rep.	Figure (cotée)	A [cm <sup>2</sup> ]	Pour calculer $z_G$		Pour calculer $y_G$	
			$S_y$ : par rapport à l'axe Gy	$S_z$ : par rapport à l'axe Gz		
			$z_{G1}$ [cm]	$S_y = z_{G1} \times A$ [cm <sup>3</sup> ]	$y_{G1}$ [cm]	$S_z = y_{G1} \times A$ [cm <sup>3</sup> ]
(+)		(+)		(+)		(+)
(-)		(-)		(-)		(-)
(+) si on ajoute les surfaces (-) si on les soustrait			$A = \sum A$		$\sum S_y$ $\sum S_z$	
			$z_G = \frac{\sum S_y}{A}$		$y_G = \frac{\sum S_z}{A}$	

Rep.	Figure (cotée)	A [cm <sup>2</sup> ]	$I_{Gy}$ : par rapport à l'axe Gy		$I_{Gz}$ : par rapport à l'axe Gz	
			$I'_{G1y}$ [cm <sup>4</sup> ]	$dz = z_G - z_{G1}$ [cm]	$I'_{G1z}$ [cm <sup>4</sup> ]	$dy = y_G - y_{G1}$ [cm]
1 (+)						
2 (-)						
...						
			$I_{Gy} = \sum I_{G1y} + A \times dz^2$		$I_{Gz} = \sum I_{G1z} + A \times dy^2$	
			Huygens $I_{Gy} = \sum I_{G1y}$		$I_{Gz} = \sum I_{G1z}$	

\* Comme la distance est élevée au carré, on ne se soucie pas du signe.

# Caractéristiques géométriques des sections

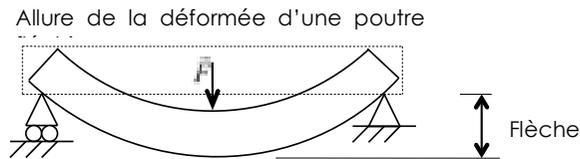
Exemples d'utilisation de  $W_{el}$  et  $I$  :

## Intérêt du moment quadratique

Considérons une poutre fléchie. Plus son moment quadratique est élevé, plus elle a une grande résistance à la flexion.

Pour être plus précis : à surface égale, plus la matière est éloignée du centre de gravité et plus la résistance à la flexion est grande. C'est ce que décrit le moment quadratique.

Exemples :



**CONTRAINTES** : Relation avec la contrainte normale maximale (dans le domaine élastique) dans la section droite d'une poutre soumise à la flexion simple :

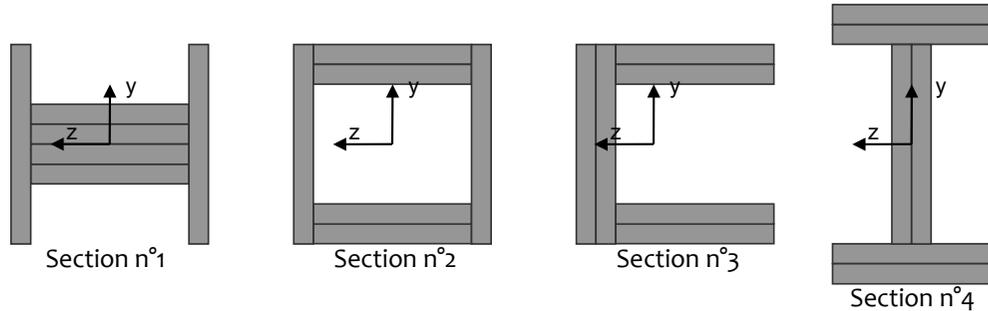
$$|\sigma_{max}| = \frac{|M_z|}{W_{el,z,min}}$$

$\sigma$  : contrainte normale [Mpa]  
 $M_z$  : moment fléchissant [MN.m]  
 $W_{el,z}$  : module de résistance élastique à la flexion [m<sup>3</sup>]

**DÉFORMÉE** : relation avec la flèche maximale (à mi-portée) d'une poutre sur deux appuis soumise à la flexion simple sous une charge répartie :

$$f_{(L/2)} = \frac{5pL^4}{384EI}$$

$f$  : flèche [m]  
 $L$  : portée [m]  
 $p$  : charge linéique [MN/m]  
 $E$  : module d'Young [Mpa]  
 $I$  : moment quadratique [m<sup>4</sup>]



Section n°2 : Les rectangles horizontaux sont plus éloignés de l'axe  $Gz$  que ceux de la section n°1.

Section n°3 : Les rectangles verticaux sont plus proches de l'axe  $Gy$  que ceux de la section n°2 (qu'ils soient à gauche ou à droite ne change rien).

Section n°4 : Les rectangles horizontaux sont plus éloignés de la  $Gz$  que ceux de la section n°2. Les rectangles verticaux sont plus proches de l'axe  $Gy$  que ceux de la section n°1.

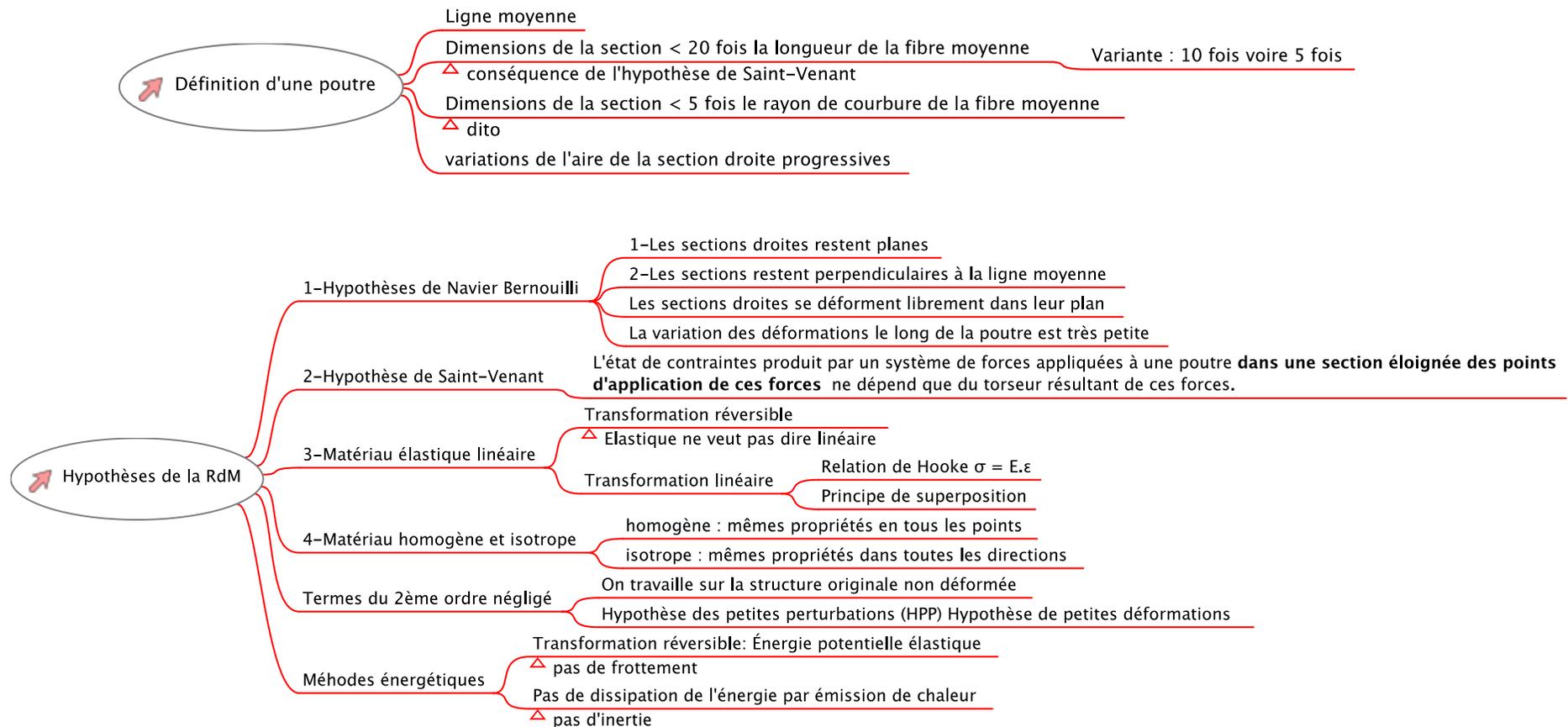
$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$   
 $I_{Gz1}$   
 $I_{Gy1}$

$A_2$   
 $I_{Gz2} > I_{Gz1}$   
 $I_{Gy2} = I_{Gy1}$

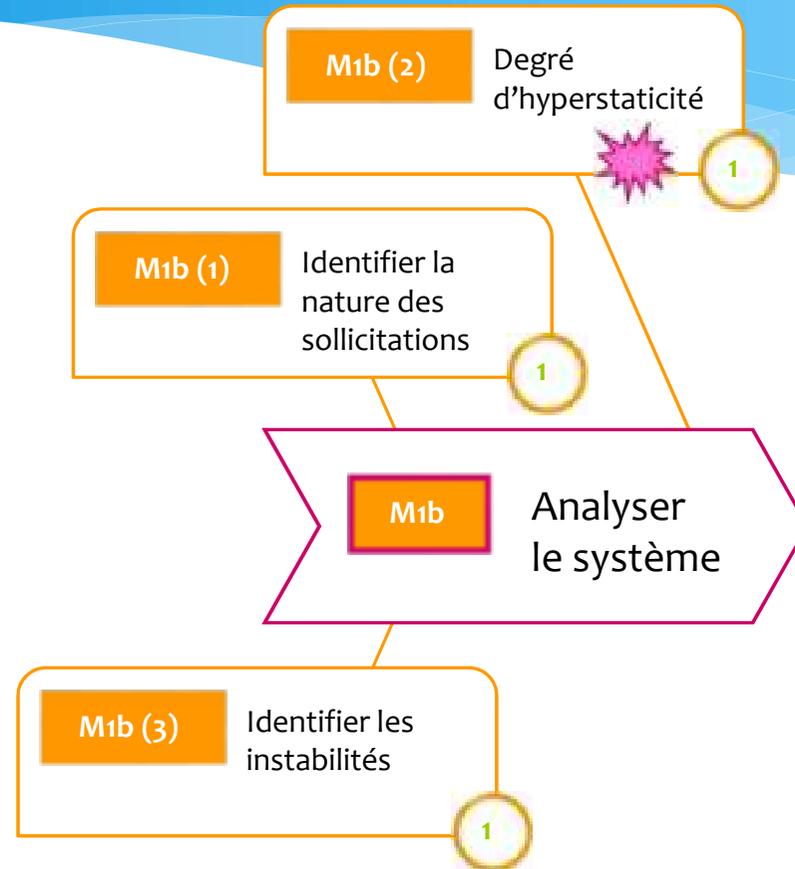
$A_3$   
 $I_{Gz3} = I_{Gz2}$   
 $I_{Gy3} < I_{Gy1}$

$A_4$   
 $I_{Gz4} > I_{Gz2}$   
 $I_{Gy4} < I_{Gy1}$

## Hypothèses de la RdM



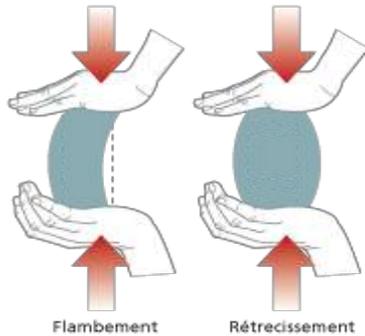
# Sommaire M1b



- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

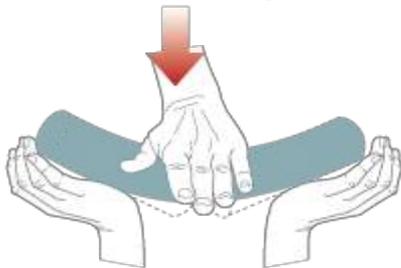
## 3 sollicitations principales

### Compression

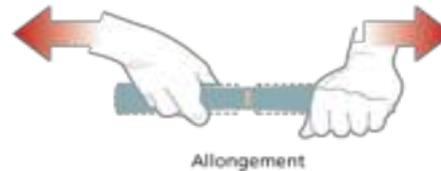


Attention : le flambement est une **instabilité** (cas traité à part)

### Flexion (simple)

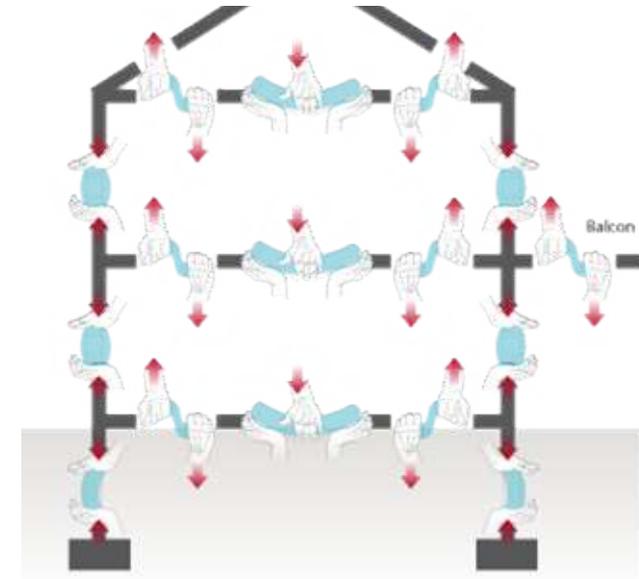


### Traction

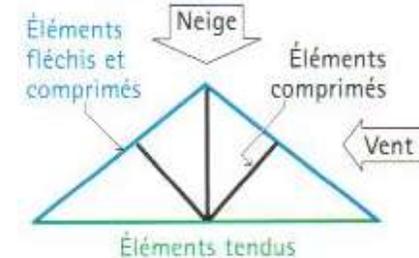


La flexion est associée à du cisaillement (maximum près des appuis, cf. effort tranchant)

Les sollicitations dans les planchers, les voiles et les barres de charpente



Toiture sous l'effet de la neige, du vent



### 3 sollicitations principales

Traction ← ————— →



Haubans (pont à)



Certaines barres d'une poutre treillis

Compression → ————— ←



Pieux



Butons



Arc funiculaire (pont à)

Flexion (simple)



Tablier de pont



Balcon (console)

Flexion composée



Poteau (charpente) support de bardage

Flexion déviée



Panne (charpente)

## Degré d'hyperstaticité des structures

### Définition du degré d'hyperstaticité

Une structure est dite hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaisons recherchées est supérieur au nombre d'équations que l'on peut écrire. Le système ne peut alors pas être résolu par les seules équations du PFS (Principe fondamental de la statique).

e : le nombre d'équations  
 x : le nombre d'inconnues  
 h : le **degré d'hyperstaticité**

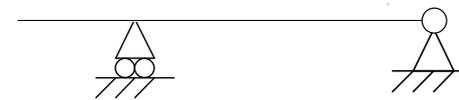
$$h = x - e$$

si  $h = 0$ , la structure est **isostatique**  
 si  $h > 0$ , la structure est **hyperstatique** de degré h  
 si  $h < 0$ , la structure est **hypostatique** de degré h, aussi appelée « **mécanisme** »

### Exemples



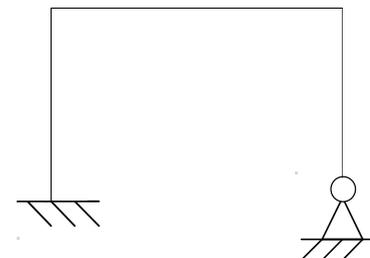
Equations e : 3  
 Inconnues x : 2+1=3  
 Système isostatique



Equations e : 3  
 Inconnues x : 2+1=3  
 Système isostatique



Equations e : 3  
 Inconnues x : 3+1=4  
 Système hyperstatique de degré 1



Equations e : 3  
 Inconnues x : 3+2=5  
 Système hyperstatique de degré 2

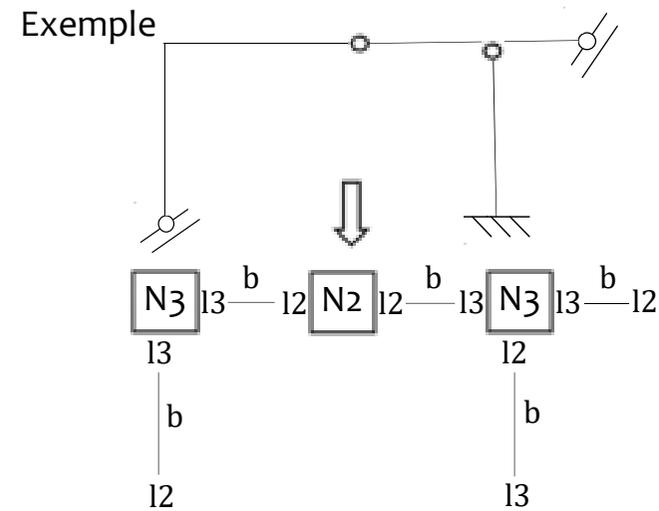
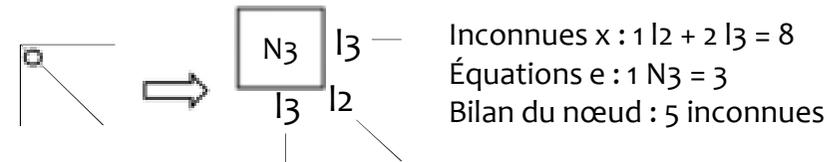
## Degré d'hyperstaticité des structures

### Méthode détaillée

On relève l'équilibre des barres, l'équilibre des nœuds et toutes les actions de liaisons internes et externes.

Schéma	Commentaire	x	e	Notation
	Appui simple	1	-	$l_1$
	Articulation	2	-	$l_2$
	Encastrement	3	-	$l_3$
	Barre	-	3	$b$
	Nœud : liaison rigide (encastrement)	6	3	$N_3$ $l_3$ — $l_3$
	Nœud : articulation (ou rotule)	4	2	$N_2$ $l_2$ — $l_2$

Exemple de combinaison :



Equations  $e$  :  $5 b + 2 N_3 + 1 N_2 = 23$   
 Inconnues  $x$  :  $5 l_2 + 5 l_3 = 25$   
 Bilan  $h$  :  $25 - 23 = 2$   
 Système hyperstatique de degré 2

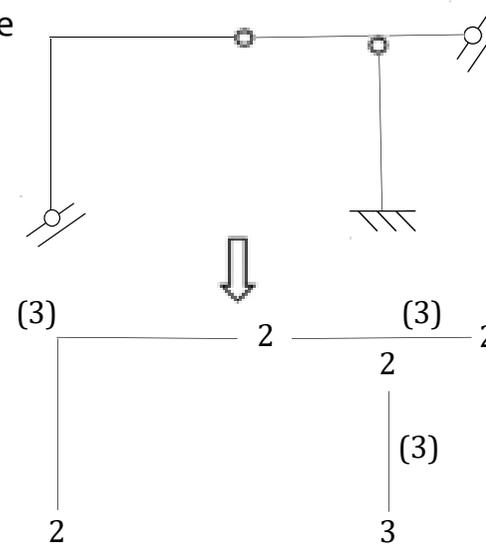
## Degré d'hyperstaticité des structures

Schéma	Commentaire	x	e	Notation
	Appui simple	1	-	1
	Articulation	2	-	2
	Encastrement	3	-	3
	Barre ou ensemble de barres monolithique	-	3	(3)
	Nœud : pour chaque barre encastree supplémentaire	+3	-	3
	Nœud : articulation (ou rotule)	2	-	2
	Nœud : pour chaque barre articulée supplémentaire	+2	-	2

### Méthode simplifiée

On isole des solides en équilibre au lieu de barres.  
Aux nœuds, on fait directement le bilan des inconnues de liaisons et des équations d'équilibre.

Exemple



$$\text{Equations } e : 3 \times 3 = 9$$

$$\text{Inconnues } x : 4 \times 2 + 1 \times 3 = 11$$

$$\text{Bilan } h : 11 - 9 = 2$$

Système hyperstatique de degré 2

## Degré d'hyperstaticité des structures

### Cas des structures treillis

Rappel : Une structure treillis est une structure à barres articulées aux nœuds et chargée uniquement aux nœuds.

Règle générale : la structure est **isostatique** si  $b = 2n - x$

Equations

si  $b > 2n - x$ , la structure est **hyperstatique** de degré  $b - 2n + x$

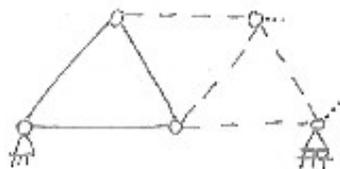
si  $b < 2n - x$ , la structure est **hypostatique** de degré  $2n - x - b$ ,  
aussi appelée « **mécanisme** »

$b$  : nombre de barres

$n$  : nombre de nœuds

$x$  : nombre d'inconnues de liaisons aux appuis

#### Structures à barres de type 1

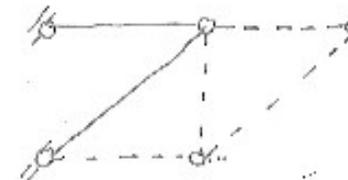


$$b = 7 \quad n = 5 \quad x = 2 + 1 = 3$$

$$\text{Bilan : } 2n - x = 2 \times 5 - 3 = 7 = b$$

Système isostatique

#### Structures à barres de type 2



$$b = 6 \quad n = 5 \quad x = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Bilan : } 2n - x = 2 \times 5 - 4 = 6$$

Système isostatique

## Instabilités

Une instabilité est un mode de rupture qui amène à la ruine brusque et immédiate de l'élément contrairement aux sollicitations classiques où les déformations sont proportionnelles aux contraintes (en élasticité linéaire).

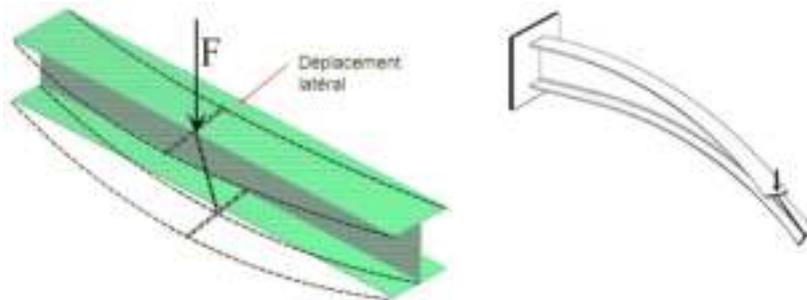
### Le flambement

Le flambement est une instabilité pour un **poteau soumis à de la compression axiale**. Contrairement aux apparences, ce n'est pas de la flexion.

Pour limiter le risque de flambement : réduire l'effort normal, réduire la longueur du poteau, transformer les appuis d'extrémités en encastremets, ajouter des appuis intermédiaires pour réduire la longueur de flambement.

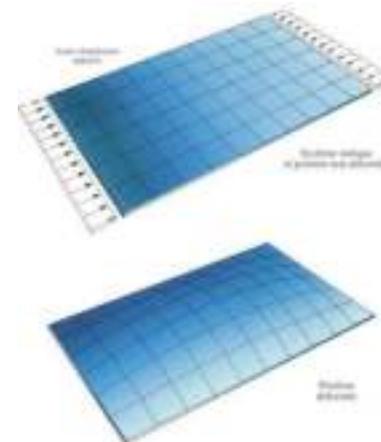


### Le déversement



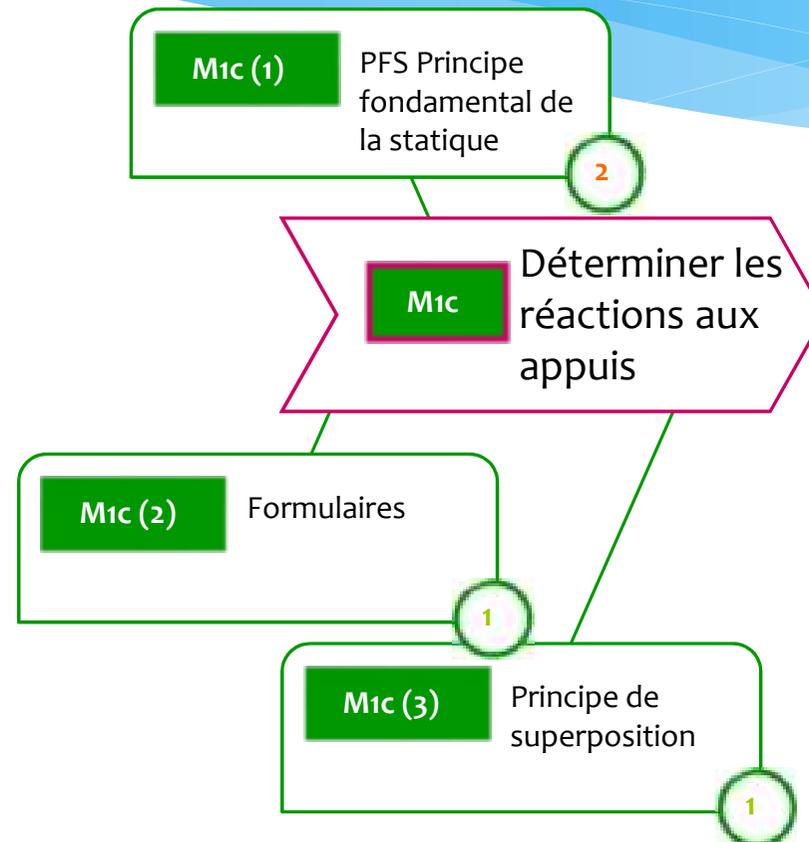
Le déversement est une instabilité de l'**âme d'une poutre fléchie**.

### Le voilement



Le voilement est une instabilité d'une **plaque soumise à de la compression**.

# Sommaire M1c – partie 1



- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

## PFS

### Principe fondamental de la statique

Soit un système isolé.

1. La résultante des efforts horizontaux (ou projection horizontale des efforts) est nulle.

$$\sum \underline{F}_x = \underline{0}$$

2. La résultante des efforts verticaux (ou projection verticale des efforts) est nulle.

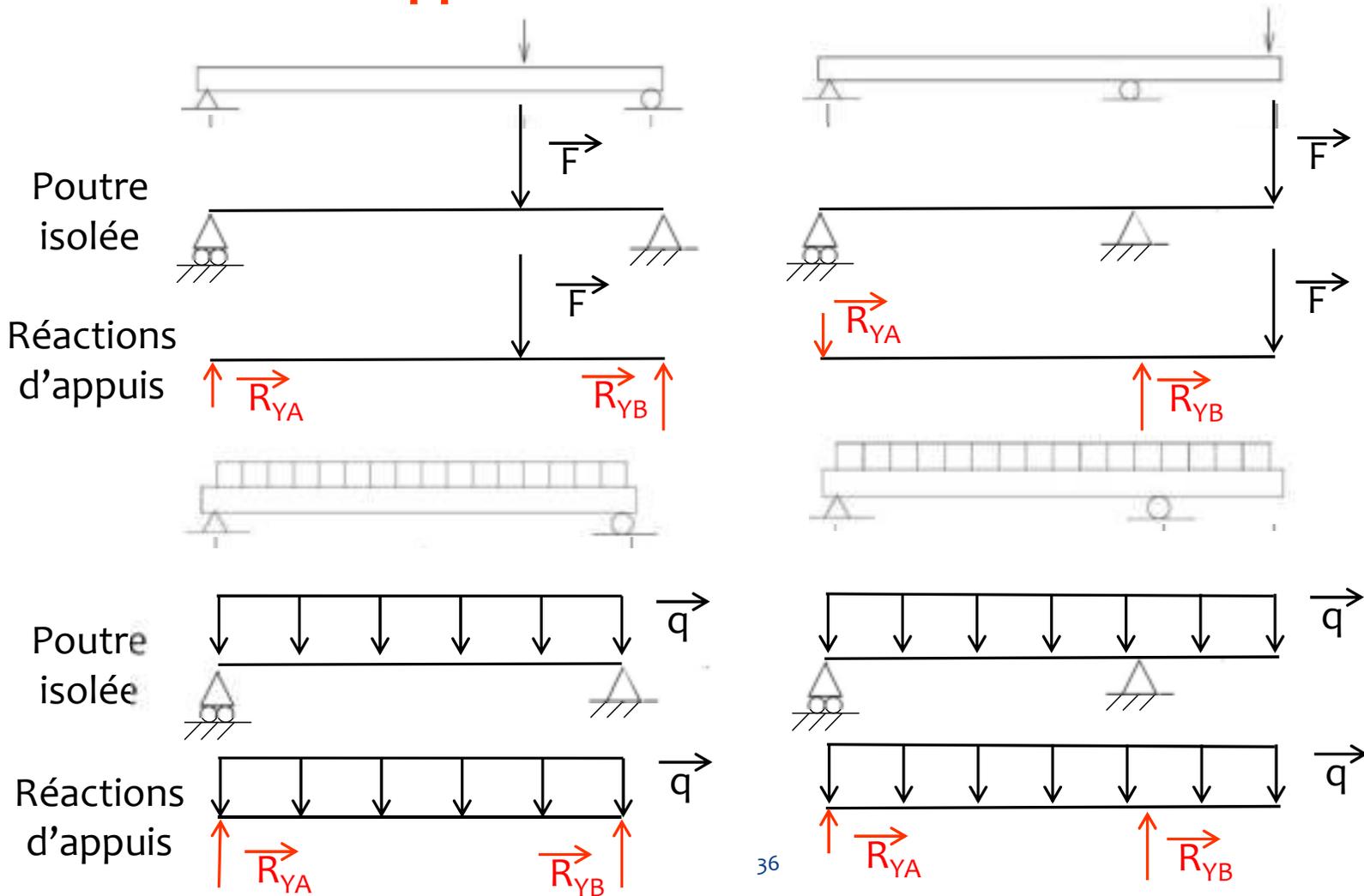
$$\sum \underline{F}_y = \underline{0}$$

3. La résultante des moments des efforts par rapport à n'importe quel point est nulle.

$$\sum \underline{M}(\underline{F}, P) = \underline{0} \quad \text{par rapport au point } P \text{ (quelconque)}$$

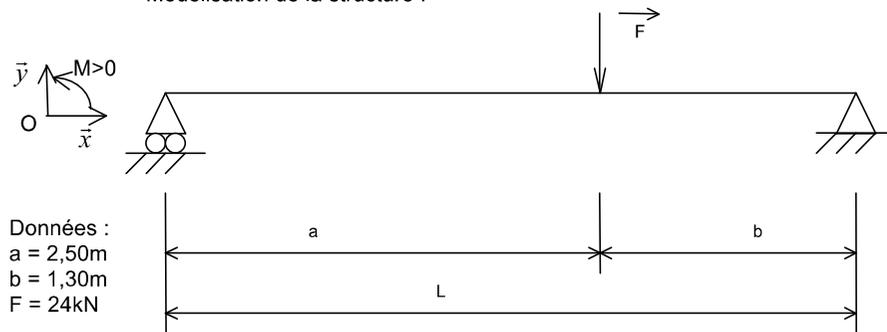
Si il y a des couples appliqués sur la structure :  $\sum \underline{M}(\underline{F}, P) + \sum \underline{C} = \underline{0}$

## PFS : détermination des réactions d'appuis

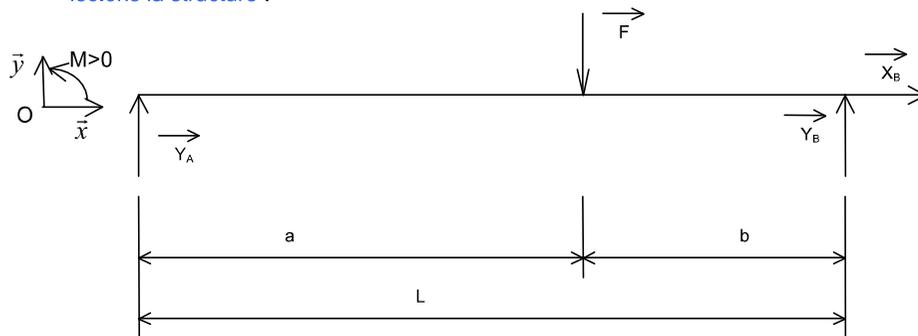


## PFS Application

Modélisation de la structure :



Isolons la structure :



Ecrivons le PFS pour déterminer les réactions d'appuis

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_X = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_Y = \vec{0} \\ \sum \vec{M}(\vec{F}, A) = \vec{0} \end{cases} \begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B - F = 0 \\ \overline{M}(\vec{Y}_A, A) + \overline{M}(\vec{Y}_B, A) + \overline{M}(\vec{F}, A) = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(3) \rightarrow 0 + Y_B \times L + -F \times a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_B = \frac{F \times a}{L}$$

$$(2) \rightarrow Y_A = F - Y_B = F - \frac{F \times a}{L} = F \times \left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

Application numérique :

$$X_B = 0\text{kN}$$

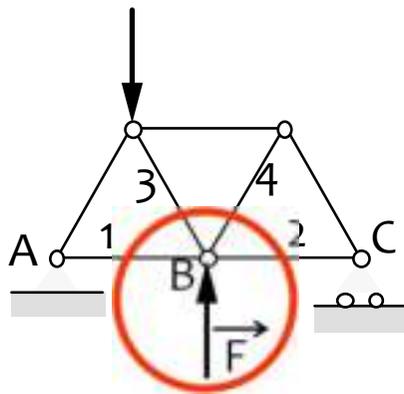
$$Y_A = F \times \left(1 - \frac{a}{L}\right) = 24 \times \left(1 - \frac{2,50}{3,80}\right) = 8,21\text{kN}$$

$$Y_B = \frac{F \times a}{L} = \frac{24 \times 2,50}{3,80} = 15,79\text{kN}$$

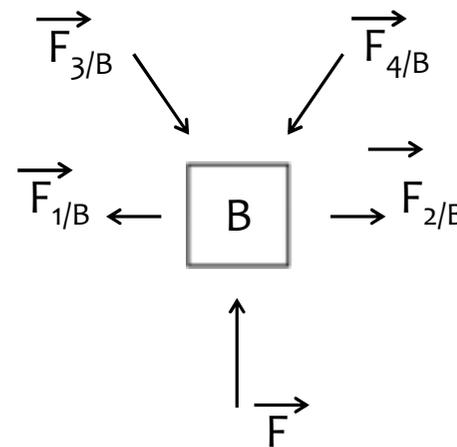
## Application du PFS : Principe d'action-réaction

On peut choisir d'isoler  
n'importe quel sous-système.

Application à l'isolement des  
nœuds d'une structure treillis



Isolement du nœud B



Isolement de la barre 2



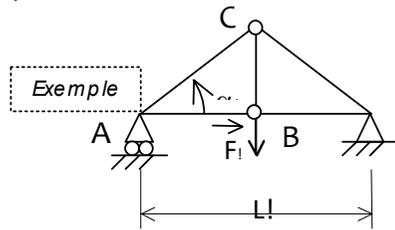
Principe d'action-réaction

$$\vec{F}_{B/2} = -\vec{F}_{2/B}$$

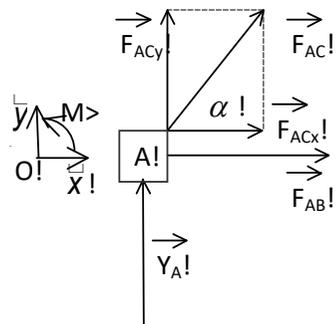
# M1c (1)

## Application du PFS : Principe d'action-réaction

Exemple : résolution d'une structure treillis par la **méthode des nœuds**



### 1. Isolement du nœud A



Connu :  
 $Y_A = F/2$

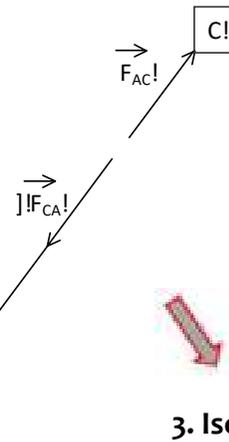
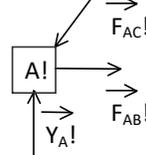
Inconnu :  
 $F_{AC}, F_{AB}$

$$\begin{aligned} \# \bar{F}_{AB} + \bar{F}_{ACx} &= 0 \\ \# \bar{Y}_A + \bar{F}_{ACy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# F_{AB} + F_{AC} \times \cos(\alpha) &= 0 \Rightarrow \# F_{AB} = ? \\ \# Y_A + F_{AC} \times \sin(\alpha) &= 0 \Rightarrow \# F_{AC} = ? \end{aligned}$$

### 2. Bilan de l'équilibre du nœud A

Résultat : On connaît l'effort de la barre sur le nœud. On en déduit l'effort du nœud sur la barre d'après le **principe d'action réaction**.

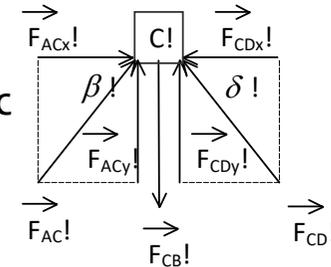


La barre AC pousse sur le nœud A donc le nœud comprime la barre AC. La barre AC est **COMPRIÉE**.

De la même manière on trouve :

La barre AB tire sur le nœud A donc le nœud tire sur la barre AB. La barre AB est **TENDUE**.

### 3. Isolement du nœud C



Connu :  
 $F_{CA}$   
Inconnu :  
 $F_{CB}, F_{CD}$

$$\begin{aligned} \# \bar{F}_{CAx} + \bar{F}_{CDx} &= 0 \\ \# \bar{F}_{CAy} + \bar{F}_{CDy} + \bar{F}_{CB} &= 0 \\ \# F_{CA} \times \cos(\beta) - F_{CD} \times \cos(\delta) &= 0 \\ \# F_{CA} \times \sin(\beta) + F_{CD} \times \sin(\delta) - F_{CB} &= 0 \end{aligned}$$

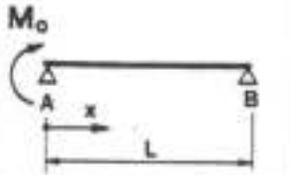
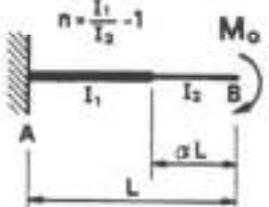
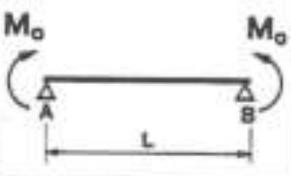
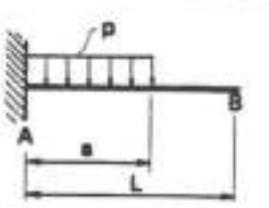
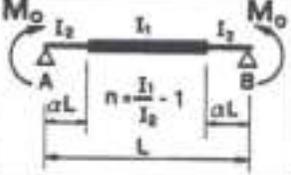
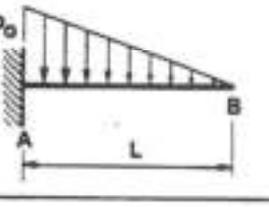
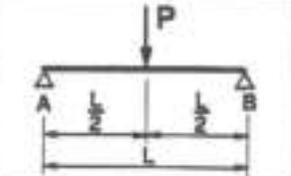
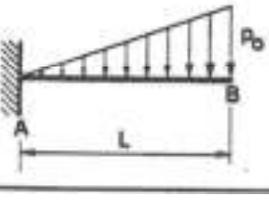
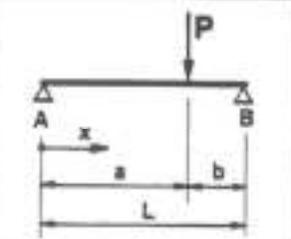
$$\Rightarrow \# F_{CD} = ? \\ \# F_{CB} = ?$$

# M1c (2)

## Formulaires

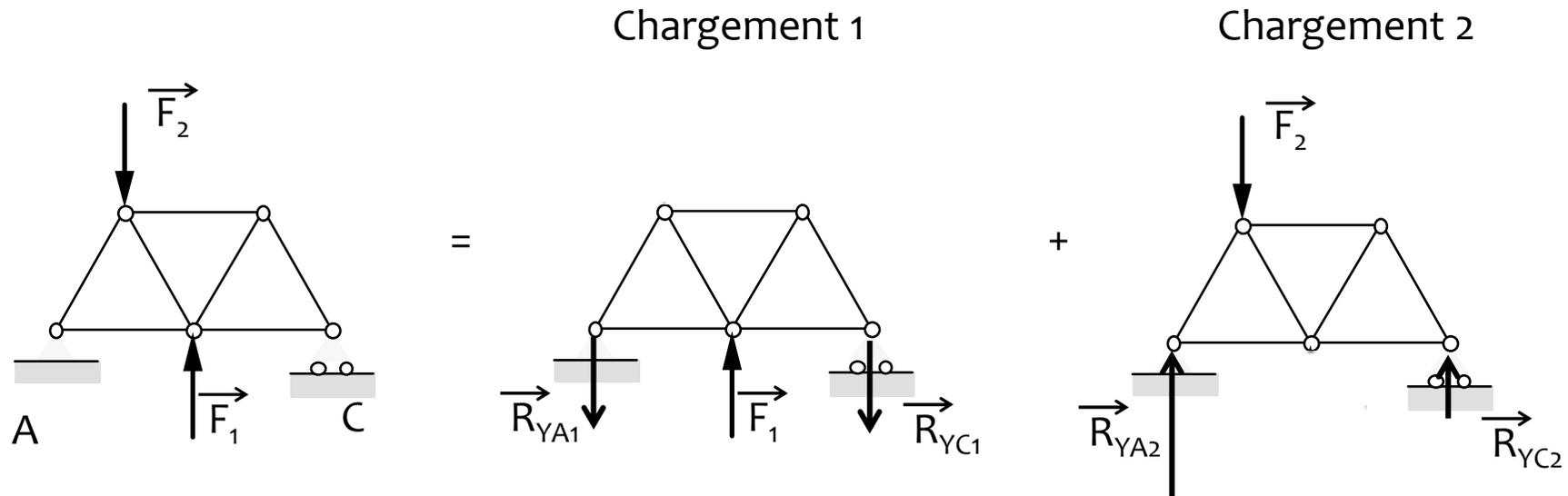
Des formulaires vous proposent les réactions d'appuis d'un grand nombre de cas de figure.

Par application du principe de superposition de plusieurs cas de chargement sur une même géométrie, vous pouvez traiter de nombreux cas.

Cas de charge	Réactions d'appui	Cas de charge	Réactions d'appui	Moment d'encastrement
	$-R_A = R_B = \frac{M_0}{L}$		$R_A = 0$	$M_A = \square M_0$
	$R_A = R_B = 0$		$R_A = ps$	$M_A = \square \frac{ps^2}{2}$
	$R_A = R_B = 0$		$R_A = \frac{p_0 L}{2}$	$M_A = \square \frac{p_0 L^2}{6}$
	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$		$R_A = \frac{p_0 L}{2}$	$M_A = \square \frac{p_0 L^2}{3}$
	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$			

## Principe de superposition

Application à la résolution d'une structure treillis chargée de plusieurs forces

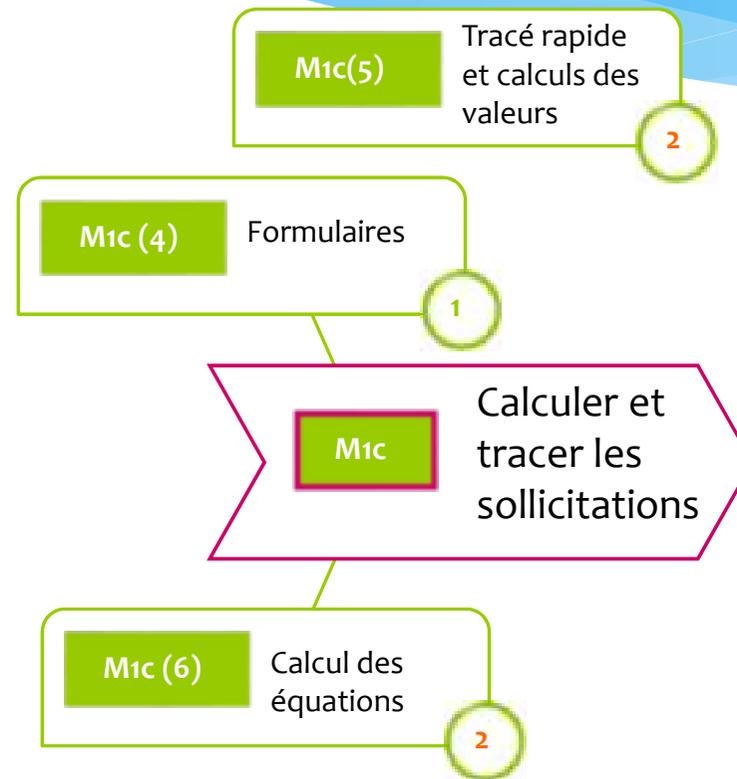


Les effets de plusieurs chargements sont égaux à la somme des effets des chargements pris séparément.

Principe de superposition

$$\vec{R}_{YC} = \vec{R}_{YC1} + \vec{R}_{YC2}$$

# Sommaire M1c – partie 2

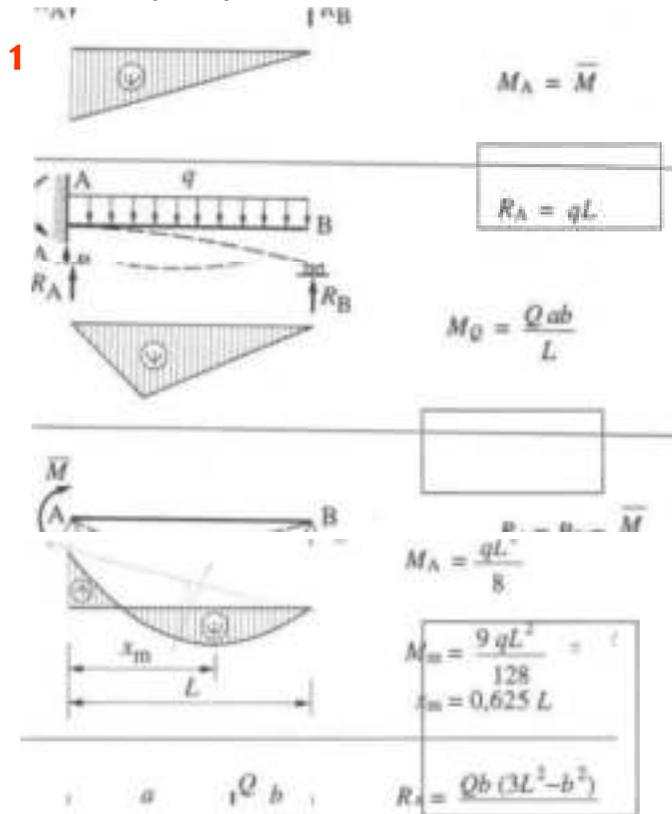


- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

# M1c (4)

## Les sollicitations : Formulaires

De nombreux formulaires sont à votre disposition pour tracer les allures de diagrammes de sollicitations et calculer les valeurs extrema. En voici quelques exemples pour le moment fléchissant.



Attention ! Il existe 2 types de formulaires : ceux de l'ingénieur et ceux de la RdM. Les signes des moments fléchissants (et donc l'orientation du diagramme) sont inversés.

Pour l'exemple 1,

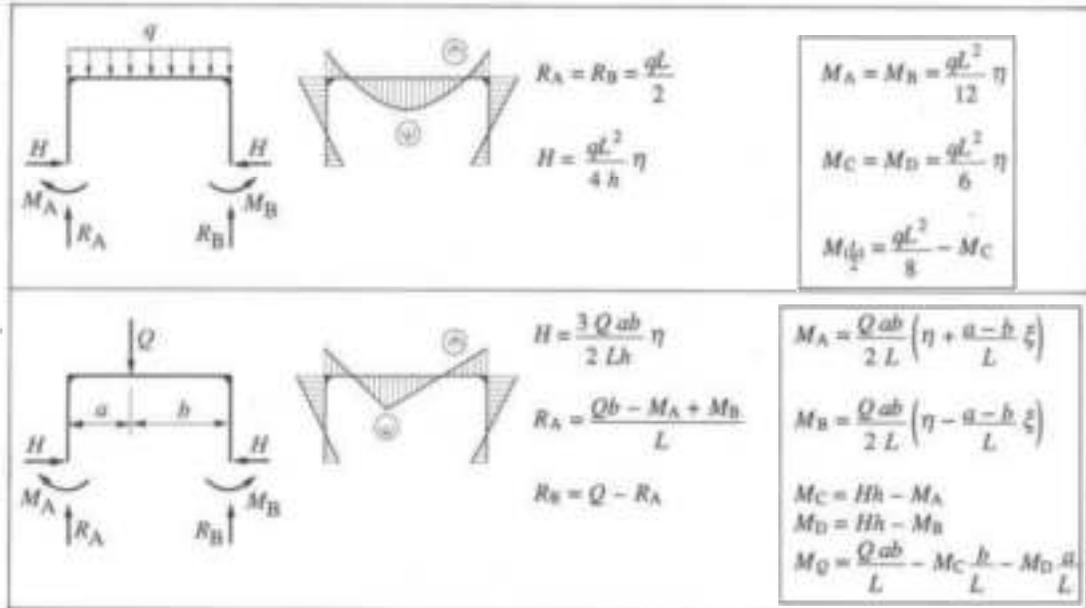
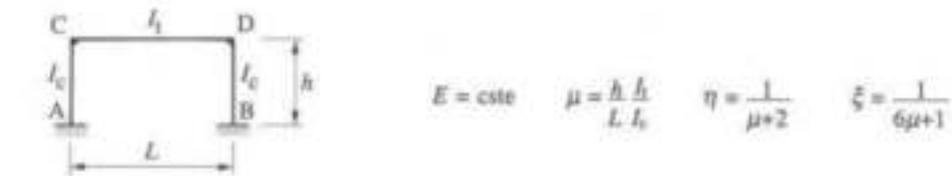
Mf max > 0 en notation RdM

Nous utiliserons la notation RdM dans toute la suite de ce cours.

Mf max < 0 en notation ingénieur

Les diagrammes de cette page sont donc en notation ingénieur.

Cadre rectangulaire bi-encasté



Ne pas confondre le signe du moment d'encastrement et celui du moment fléchissant (opposés en RdM).

## Les sollicitations

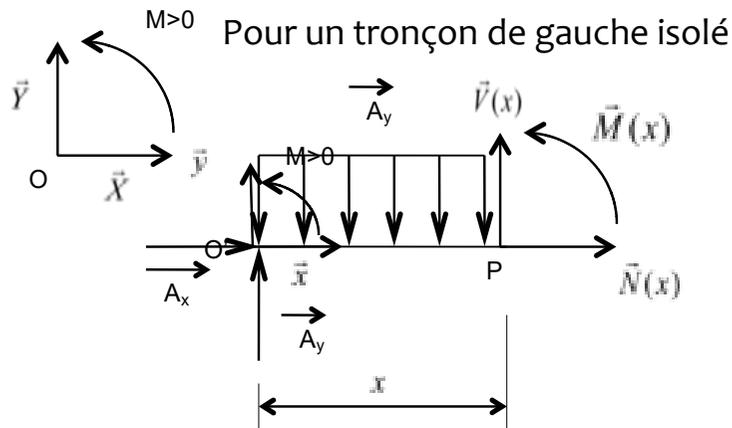
Efforts internes qui équilibrent les actions extérieures qui s'appliquent sur le tronçon isolé

coupé à une abscisse  $x$   
dans le repère **global**  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, M > 0)$

$N(x)$  : effort normal

$V(x)$  : effort tranchant

$M_f(x)$  : moment fléchissant



$$N(x) = -\sum A_x$$

$$V(x) = -\sum A_y$$

$$M(x) = -\sum \text{Moment}(\vec{A}, P)$$

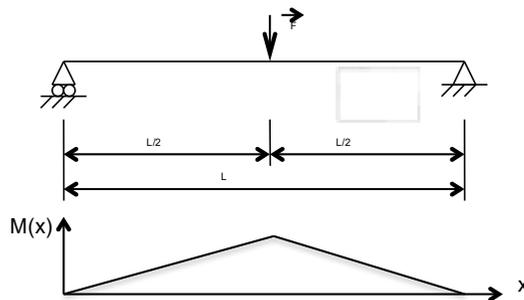
dans le repère **local**  $(O', \vec{x}, \vec{y}, M > 0)$

Cas	Schéma	Composantes			
		N	V	T	$M_f$
Traction		N	0	0	0
Cisaillement		0	V	0	0
Torsion		0	0	T	0
Flexion pure		0	0	0	$M_{fz}$
Flexion simple		0	$V_y$	0	$M_{fz}$
Flexion composée		N	$V_y$	0	$M_{fz}$
Flexion + Torsion		0	$V_y$	T	$M_{fz}$
Flambement ou Flambage		N	0	0	$M_{fz}$
Flexion déviée		0	$V_y$ $V_z$		$M_{fz}$ $M_{fy}$

# M1c (5)

## Sollicitations - Tracé rapide

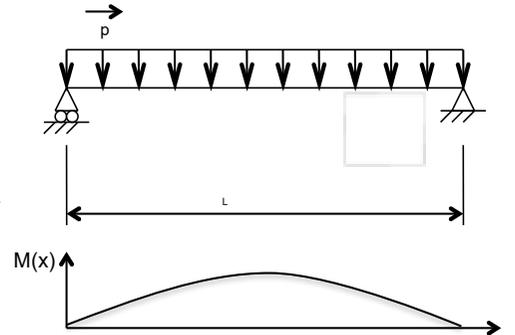
2 poutres caractéristiques à connaître :



Rappel :  $! " = ! " = \frac{! \times !}{!}$

$$0 < x < L/2 \quad ! (!) = \frac{!}{2} \times !$$

$$! (!/2) = \frac{!}{2} \times \frac{!}{2} = \frac{! \times !}{4}$$

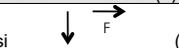


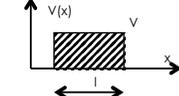
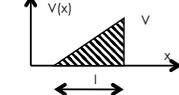
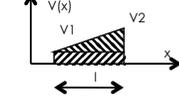
Rappel :  $! " = ! " = \frac{! \times !}{!}$

$$! (!) = \frac{! \times !}{2} \times ! - \frac{! \times !^2}{2}$$

$$! (!/2) = \frac{! \times !}{2} \times \left(\frac{!}{2}\right) - \frac{! \times \left(\frac{!}{2}\right)^2}{2} = \frac{! \times !^2}{4} - \frac{! \times !^2}{8} = \frac{! \times !^2}{8}$$

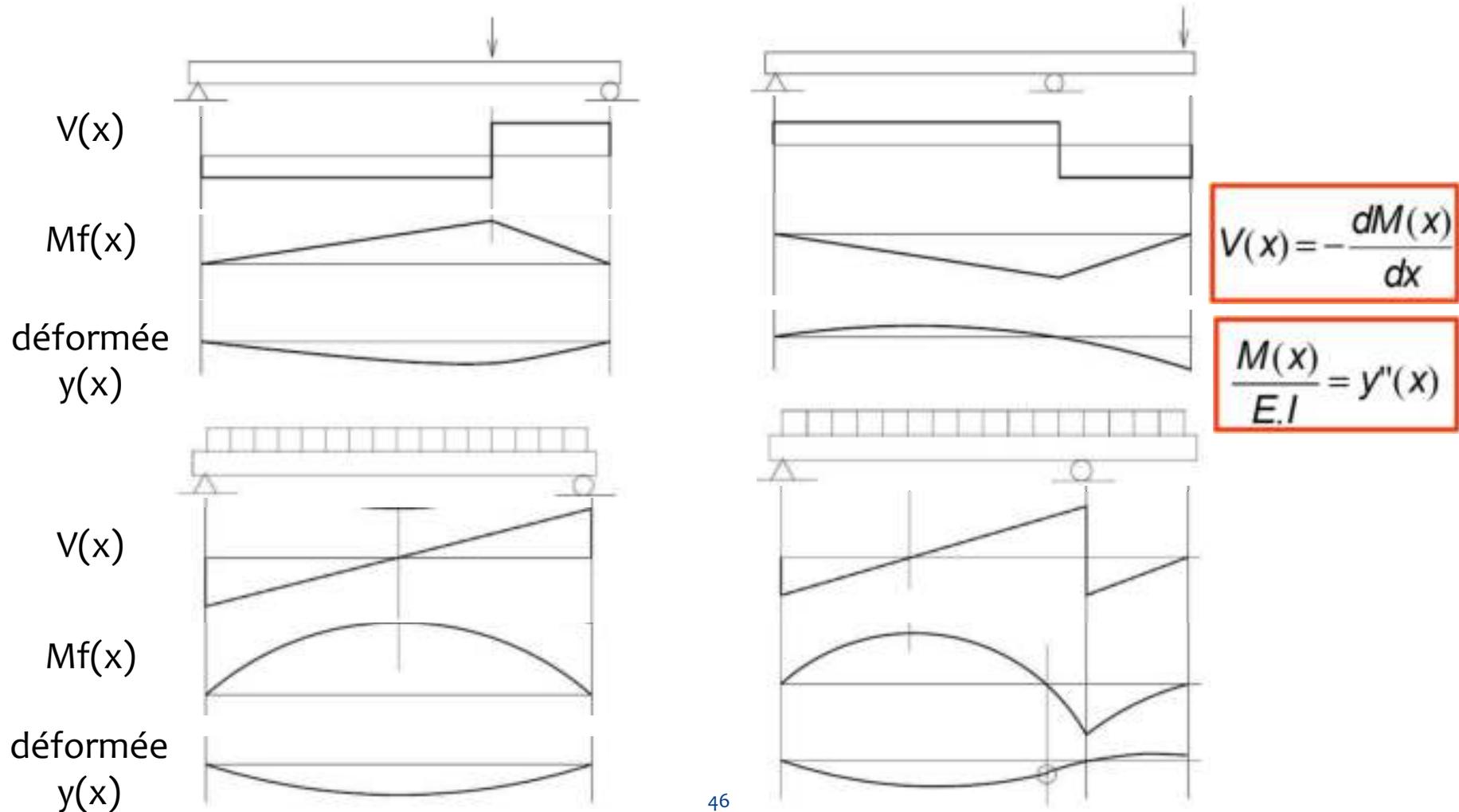
Des règles à connaître : Voir exemples de tracés page suivante

Chargement	Effort tranchant V(x)	Moment fléchissant M(x)
Allure		
si force ponctuelle	<i>constant</i>	<i>linéaire</i>
si charge répartie	<i>linéaire</i>	<i>quadratique</i>
Sens variation de V(x)		
si  (F<0)	V(x)  ( <i>saut F &gt; 0</i> )	
si  (F>0)	V(x)  ( <i>saut F &lt; 0</i> )	
	$\Delta V = \pm F$	
Valeur variation	<i>Calcul : V(a+) = V(a-) ± F</i>	
si  (q<0)	V(x)  ( <i>pente q &gt; 0</i> )	
si  (q>0)	V(x)  ( <i>pente q &lt; 0</i> )	
	$\Delta V = \pm (q \times b)$	
Valeur variation	<i>Calcul : V(a+b) = V(a) ± (q x b)</i>	

Chargement	Effort tranchant V(x)	Moment fléchissant M(x)
Sens variation de M(x)		
Tangente de M(x) selon la valeur de V(x)	Si V < 0	M(x) 
	Si V > 0	M(x) 
Valeur variation		$\Delta M = \pm \text{Aire sous } V(x)$ <i>Calcul : M(a+b) = M(a) ± Aire sous V(x)</i>
Calcul de l'aire sous la courbe d'effort tranchant	 	<i>Rectangle : <math>\frac{l \times V}{2}</math></i> <i>Triangle : <math>\frac{l \times V}{2}</math></i> <i>Trapeze : <math>\frac{l \times (V1 + V2)}{2}</math></i>
	Si V = 0	Extrémum de M(x) 

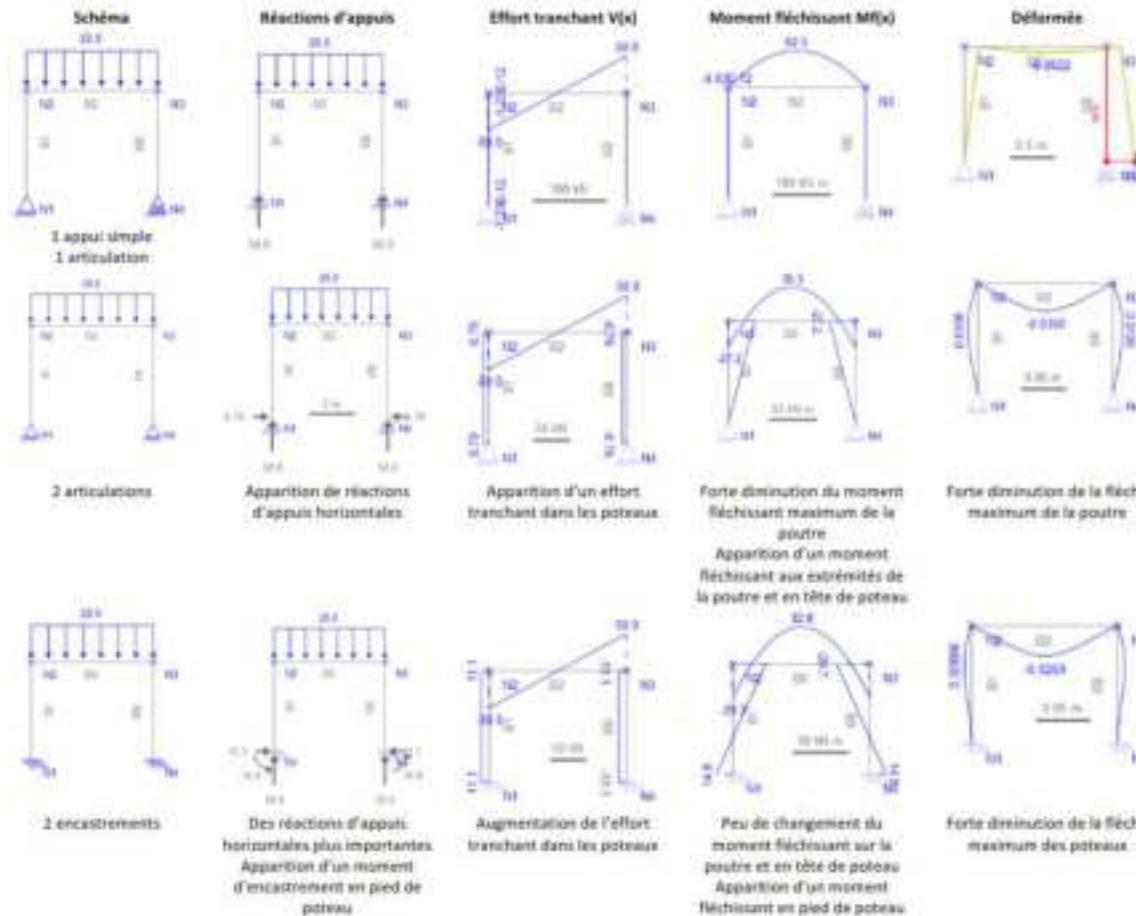
Sollicitations - Tracé rapide

Allures des sollicitations et des déformées

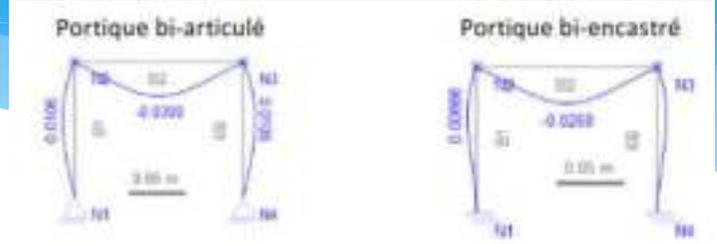


## Sollicitations - Tracé rapide

Influence des liaisons sur les sollicitations et les déformées



Attention : les flèches sont réduites en travées mais les sollicitations sont plus importantes aux appuis.



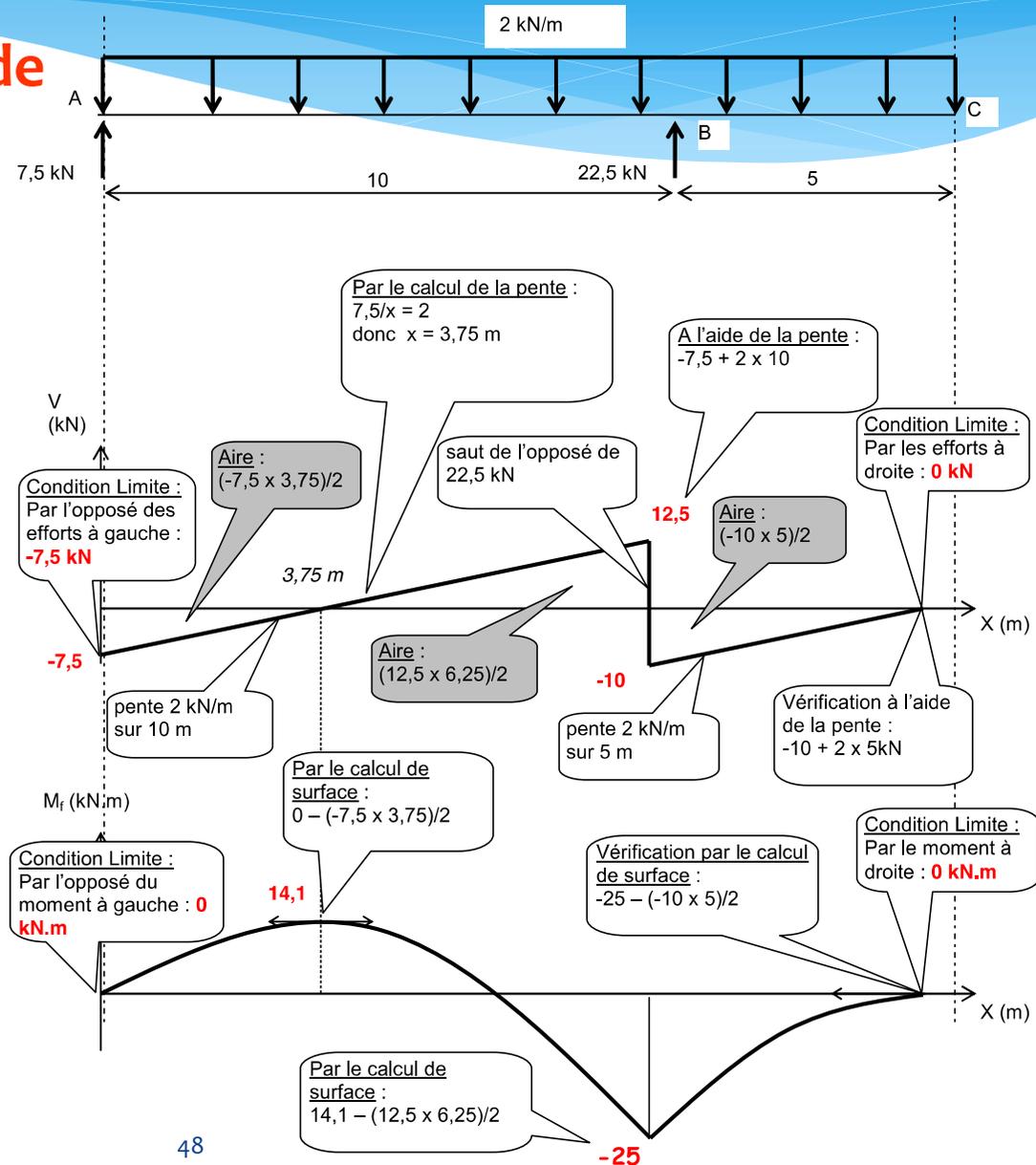
# M1c (5)

## Sollicitations - Tracé rapide

1. Calcul des actions de liaison.
2. Mise en place des conditions aux limites sur les 2 diagrammes.
3. Tracé de l'effort tranchant de la gauche vers la droite.
4. Tracé du moment fléchissant en fonction de l'effort tranchant, de la gauche vers la droite. Les valeurs peuvent se déduire de la surface sous le diagramme d'effort tranchant (en gris).

Dans certains cas, il sera avantageux de commencer le tracé par la droite. Le cas échéant, il ne faut PAS appliquer la règle du signe opposé vue dans l'équilibre du tronçon de gauche isolé car il s'agit d'un tronçon de droite isolé.

Dans tous les cas, vérifier que la fin des calculs redonne la dernière condition aux limites ou que les calculs sur les tronçons de gauche et de droite se rejoignent.

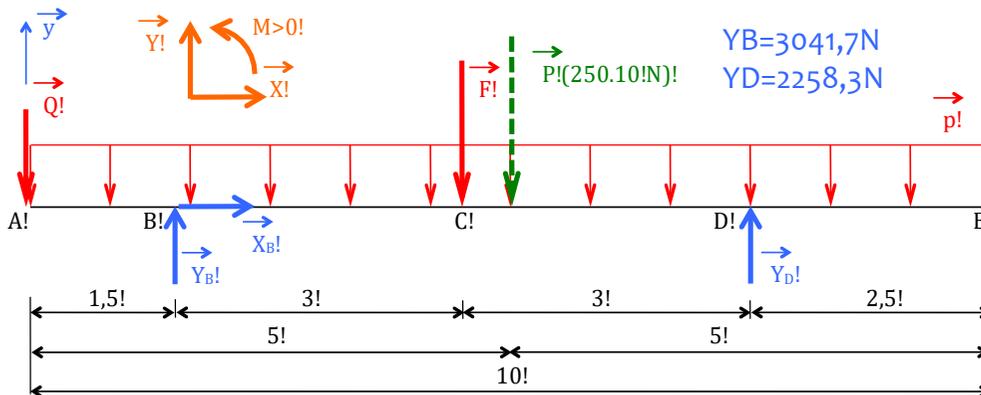


# M1c (6)

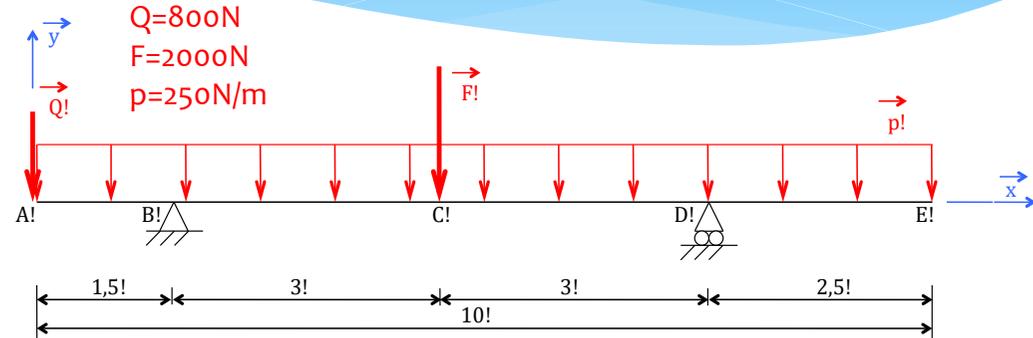
## Sollicitations Calcul des équations

**0 :** Le système est isostatique (1 solide en équilibre ; 1 appui simple en D et 1 appui double en B soit 3 inconnues de liaison)

**1 :** Par application du PFS, on calcule les inconnues de liaison  $Y_B$  et  $Y_D$  (et  $X_B=0$ ).



- 2 :**
- On positionne les coupures avant chaque nouvelle action,
  - On écrit le PFS sur chaque tronçon isolé de longueur  $x$  (abscisse locale sur le tronçon droit) pour obtenir les équations de  $N(x)$   $V(x)$  et  $M(x)$ ,
  - On calcule les valeurs aux limites.



**Coupe n°1 :  $0 < x < 1,5m$**

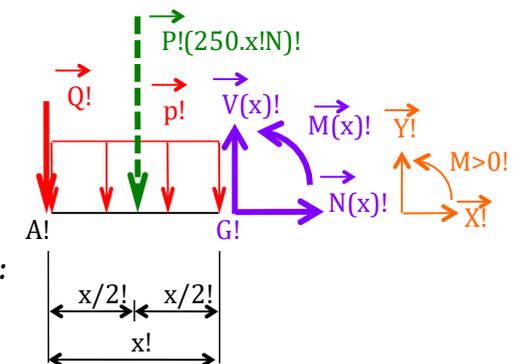
Tronçon de gauche isolé :

$$PFS : \begin{cases} \sum F/x = 0 \\ \sum F/y = 0 \\ \sum M/G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ +V(x) - 800 - 250 \cdot x = 0 \\ +M(x) + 800 \cdot x + 250 \cdot x \cdot x/2 = 0 \end{cases}$$

Valeurs particulières :

$$\begin{cases} N(0) = 0 \text{ N} \\ V(0) = +800 \text{ N} \\ M(0) = 0 \text{ N.m} \end{cases} \begin{cases} N(1,5^-) = 0 \text{ N} \\ V(1,5^-) = +1175 \text{ N} \\ M(1,5^-) = -1481,3 \text{ N.m} \end{cases}$$



Équations de sollicitations :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 250 \cdot x + 800 \\ M(x) = -125x^2 - 800 \cdot x \end{cases}$$

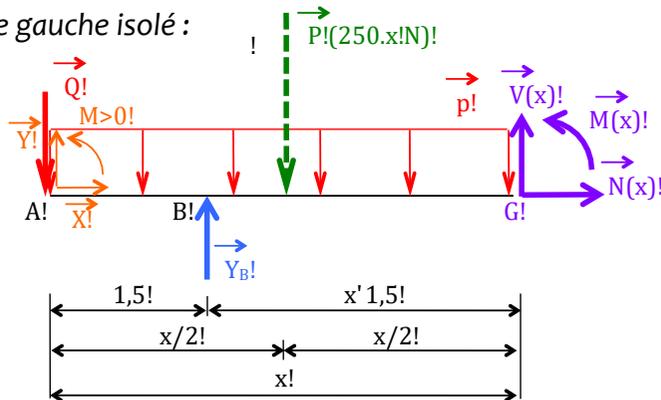
# M1c (6)

## Sollicitations Calcul des équations

2 (suite) :

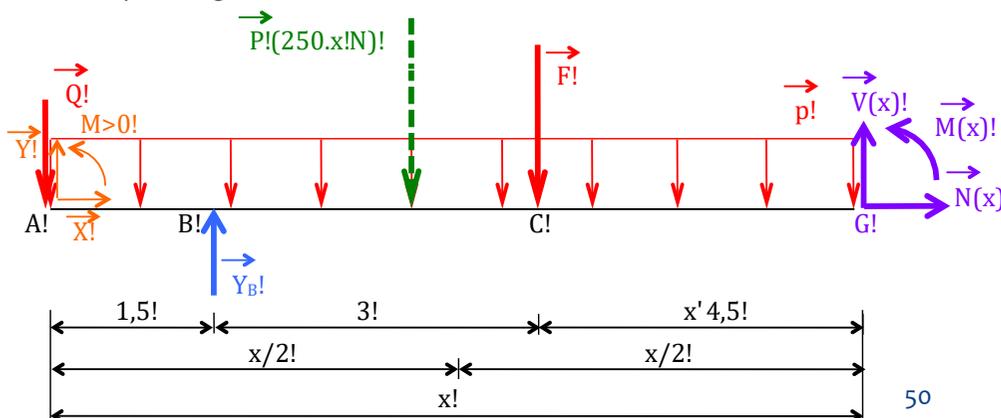
Coupe n°2 :  $1,5 < x < 4,5\text{m}$

Tronçon de gauche isolé :



Coupe n°3 :  $4,5 < x < 7,5\text{m}$

Tronçon de gauche isolé :



$$\text{PFS : } \begin{cases} N(x) = 0 \\ +V(x) - 800 - 250 \cdot x + 3041,7 = 0 \\ +M(x) + 800 \cdot x + 250 \cdot x \cdot x/2 - 3041,7(x-1,5) = 0 \end{cases}$$

Équations de sollicitations :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 250 \cdot x - 2242 \\ M(x) = -125x^2 + 2242 \cdot x - 4563 \end{cases}$$

Valeurs particulières :

$$\begin{cases} N(1,5^+) = 0 \text{ N} \\ V(1,5^+) = -1867 \text{ N} \\ M(1,5^+) = -1481,3 \text{ N.m} \end{cases} \quad \begin{cases} N(4,5^-) = 0 \text{ N} \\ V(4,5^-) = -1117 \text{ N} \\ M(4,5^-) = +2994,8 \text{ N.m} \end{cases}$$

$$\text{PFS : } \begin{cases} N(x) = 0 \\ +V(x) - 800 - 250 \cdot x - 2000 + 3042 = 0 \\ +M(x) + 800 \cdot x + 250 \cdot x \cdot x/2 + 2000(x-4,5) - 3042(x-1,5) = 0 \end{cases}$$

Équations de sollicitations :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 250 \cdot x - 242 \\ M(x) = -125x^2 + 242 \cdot x + 4437 \end{cases}$$

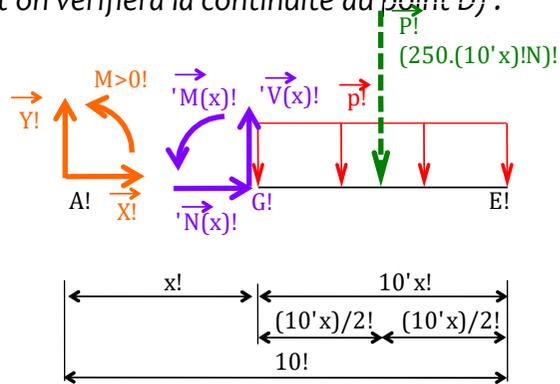
Valeurs particulières :

$$\begin{cases} N(4,5^+) = 0 \text{ N} \\ V(4,5^+) = +883 \text{ N} \\ M(4,5^+) = +2994,8 \text{ N.m} \end{cases} \quad \begin{cases} N(7,5^-) = 0 \text{ N} \\ V(7,5^-) = -1633 \text{ N} \\ M(7,5^-) = -779,3 \text{ N.m} \end{cases}$$

### Sollicitations Calcul des équations

#### 2 (suite) : Coupure n°4 : $7,5 < x < 10\text{m}$

Pour simplifier les calculs, on isole le tronçon de droite (et on vérifiera la continuité au point D) :



PFS :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ -V(x) - 250 \cdot (10-x) = 0 \\ -M(x) - 250 \cdot (10-x) \cdot (10-x)/2 = 0 \end{cases}$$

Équations de sollicitations :

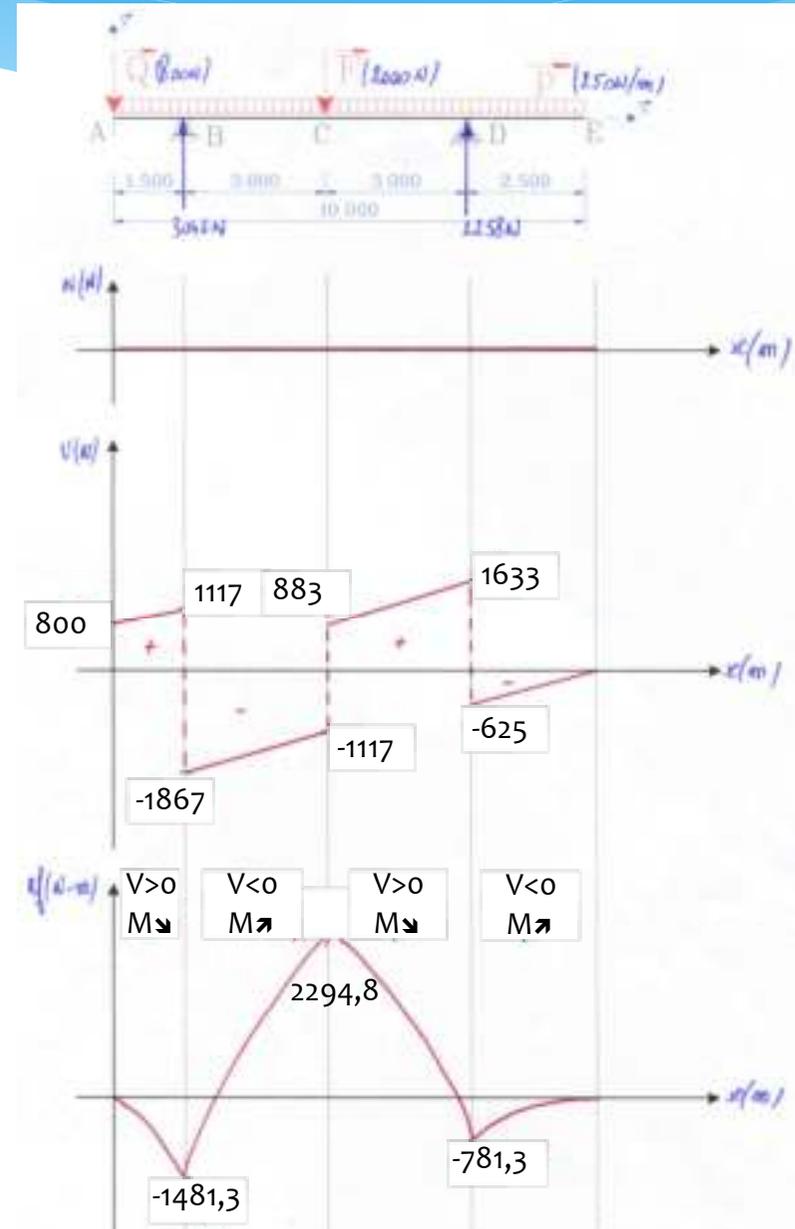
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = 250 \cdot x - 2500 \\ M(x) = -125x^2 + 2500 \cdot x - 12500 \end{cases}$$

Valeurs particulières :

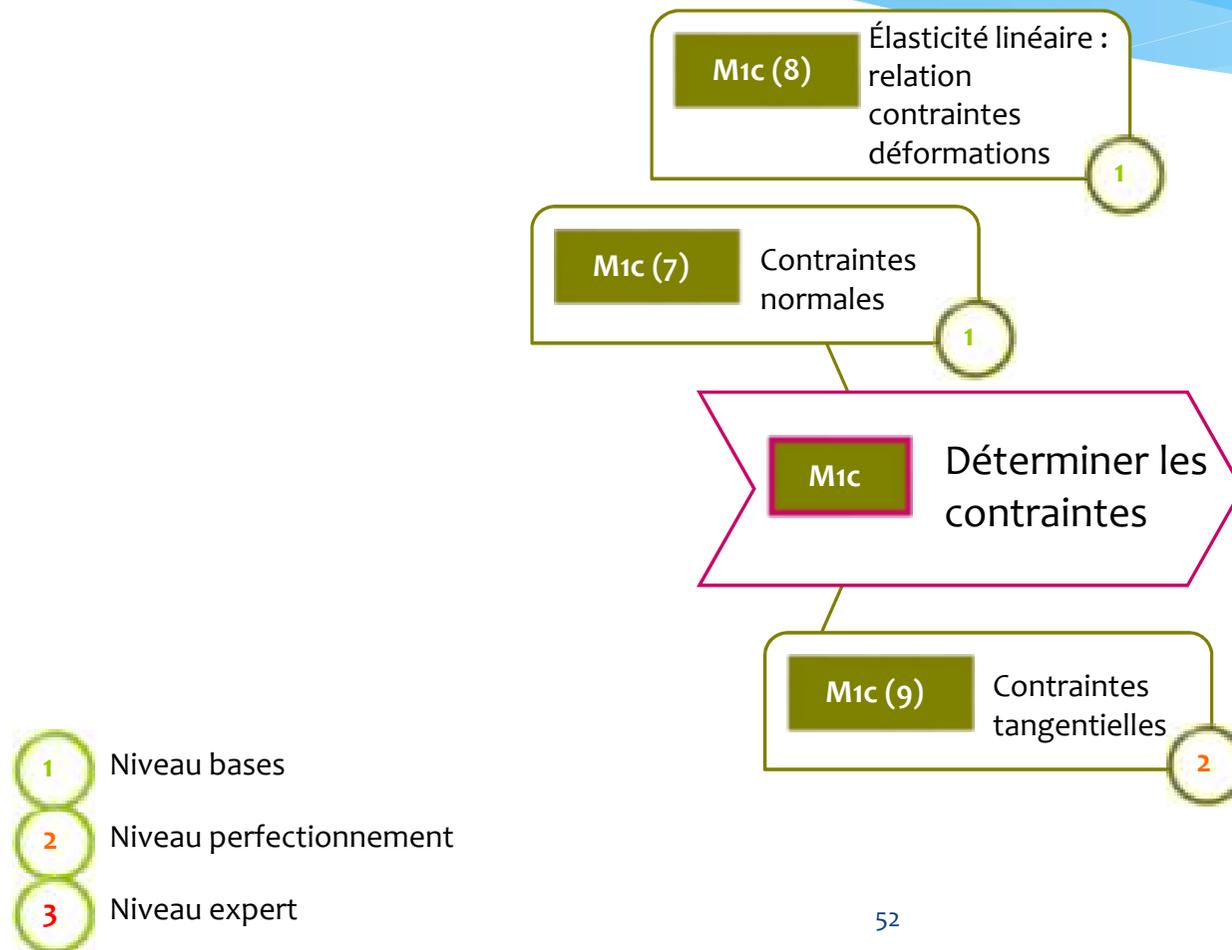
$$\begin{cases} N(7,5^+) = 0 \text{ N} \\ V(7,5^+) = -625 \text{ N} \\ M(7,5^+) = -781,3 \text{ N.m} \end{cases} \quad \begin{cases} N(10^-) = 0 \text{ N} \\ V(10^-) = 0 \text{ N} \\ M(10^-) = 0 \text{ N.m} \end{cases}$$

Vérification de la continuité au point D :

$$\begin{aligned} V(7,5^-) - Y_D &= 1633 - 2258 = -625 = V(7,5^+) \\ M(7,5^-) &= 779,3 \text{ N.m} \text{ presque égal à } M(7,5^+) = -781,3 \text{ N.m} \\ &\text{(du aux arrondis pris sur } Y_B \text{ et } Y_D) \end{aligned}$$

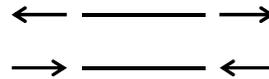


# Sommaire M1c – partie 3



## Contraintes normales

### Traction simple et compression simple



La contrainte, exprimée en Pa, qui s'exerce sur la section droite de la poutre a l'expression suivante :

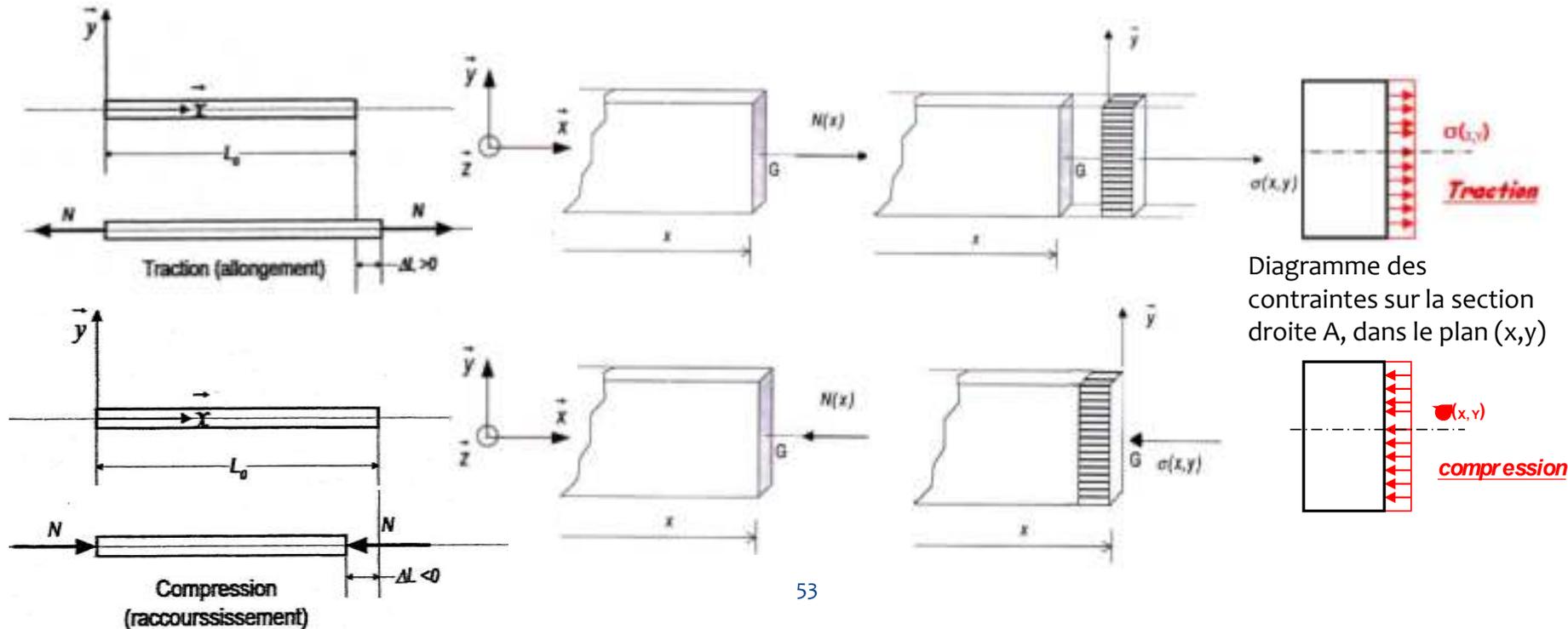
$$\sigma(x, y) = \frac{N(x)}{A}$$

Avec :

- $N(x)$  : effort normal à l'abscisse  $x$  [MN],
- $A$  : aire de la section droite de la poutre [ $m^2$ ],
- $\sigma(x, y)$  : contrainte normale de compression à l'abscisse  $x$  (invariable selon  $y$ ) [MPa].

Rappel sur le tenseur de cohésion  
 $N(x) < 0$  en compression :

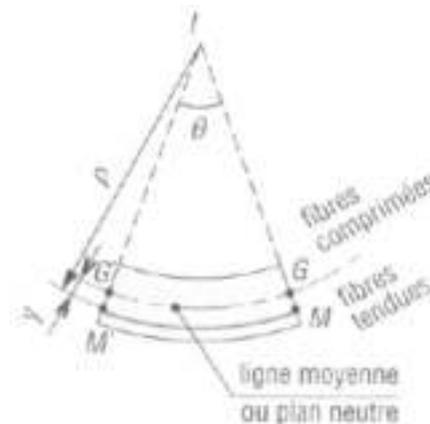
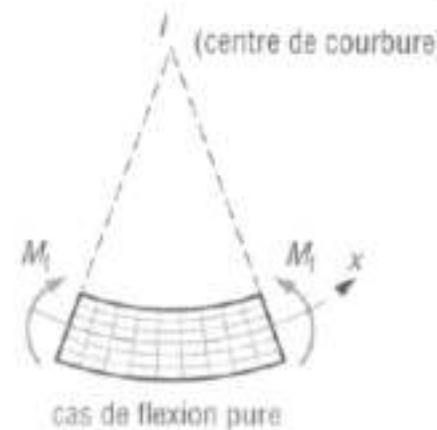
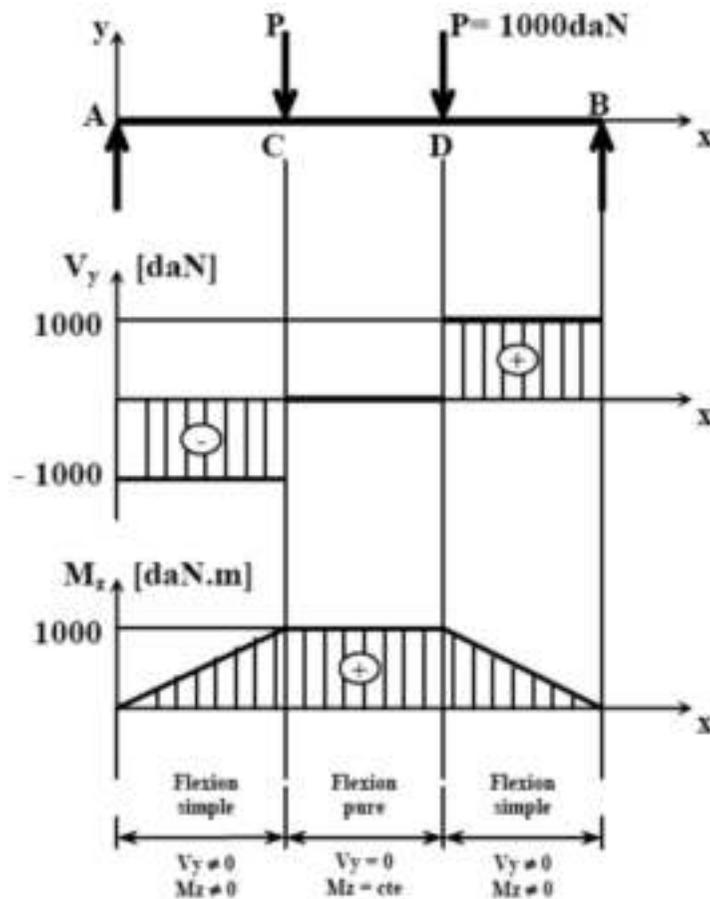
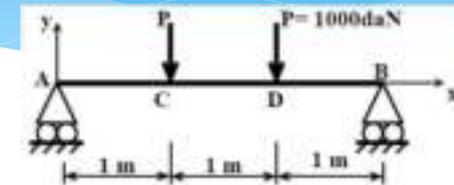
$$\{T_{\text{système de forces}}\}_G = \begin{Bmatrix} |N_x| & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$



## Contraintes normales

### Cas particulier de la flexion pure

La flexion pure (sans effort tranchant) apparaît dans l'essai de flexion 4 points.

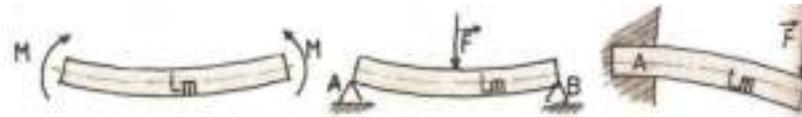


L'expérience montre qu'entre les points C et D, les fibres de la poutre se déforment selon des arcs de cercles parallèles.

- La ligne moyenne  $GG'$  et le plan  $Gxz$  correspondant ne subissent aucune déformation : on parlera de **fibre neutre** et de **plan neutre**.
- Les fibres situées au-dessus du plan neutre raccourcissent : elles sont **comprimées**.
- Les fibres situées en-dessous du plan neutre s'allongent : elles sont **tendues**.

## Contraintes normales

### Flexion simple



La contrainte, exprimée en Pa, qui s'exerce sur la section droite de la poutre a l'expression suivante :

$$\sigma(x, y) = -\frac{Mf(x)}{I_{GZ}} \cdot y$$

Avec :

- $M(x)$  : moment fléchissant à l'abscisse  $x$  [MN.m],
- $I_{Gz}$  : moment quadratique de la section droite de la poutre par rapport à l'axe  $z$  [m<sup>4</sup>],
- $y$  : distance du point de la section considéré par rapport au CdG [m],
- $\sigma(x,y)$  : contrainte normale de compression à l'abscisse  $x$  et à l'ordonnée  $y$  [Mpa].

Rappel sur le torseur de cohésion :

$V \neq 0$  en flexion simple

$M > 0$  en milieu de travée pour la poutre sur 2 appuis soumise à son poids propre

$$\{T_{\text{système de forces}}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline V & 0 \\ \hline 0 & Mf \end{array} \right\}_G$$

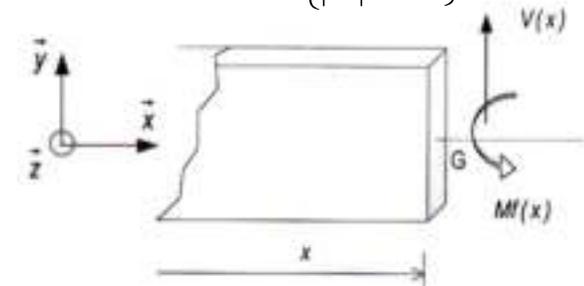
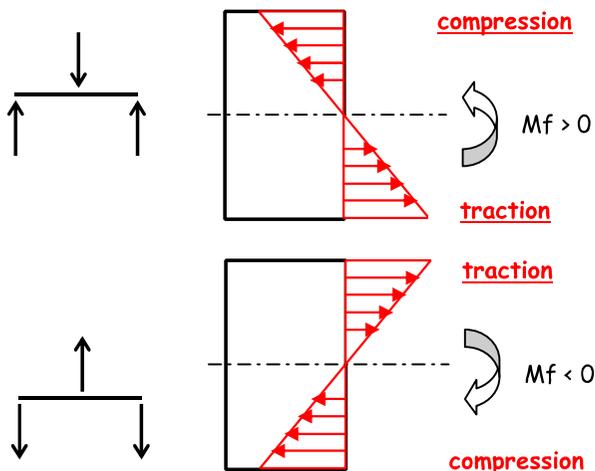


Diagramme des contraintes sur la section droite A, dans le plan (x,y)



Contrainte normale de flexion maximum :

$$\sigma(x, y) = -\frac{Mf(x)}{I_{GZ}} = -\frac{Mf(x)}{W_{ely}}$$

Dans le cas d'une poutre symétrique, la contrainte est maximale pour  $y = v = h/2$

- $W_{elz}$  : module de résistance élastique à la flexion de la section droite de la poutre par rapport à l'axe  $z$  [m<sup>3</sup>], à utiliser directement pour les profils de module connu
- A ne pas oublier pour les profils métalliques : dans l'OTUA, les axes  $y$  et  $z$  sont inversés, il faut donc utiliser  $W_{ely}$  dans ce cas particulier.

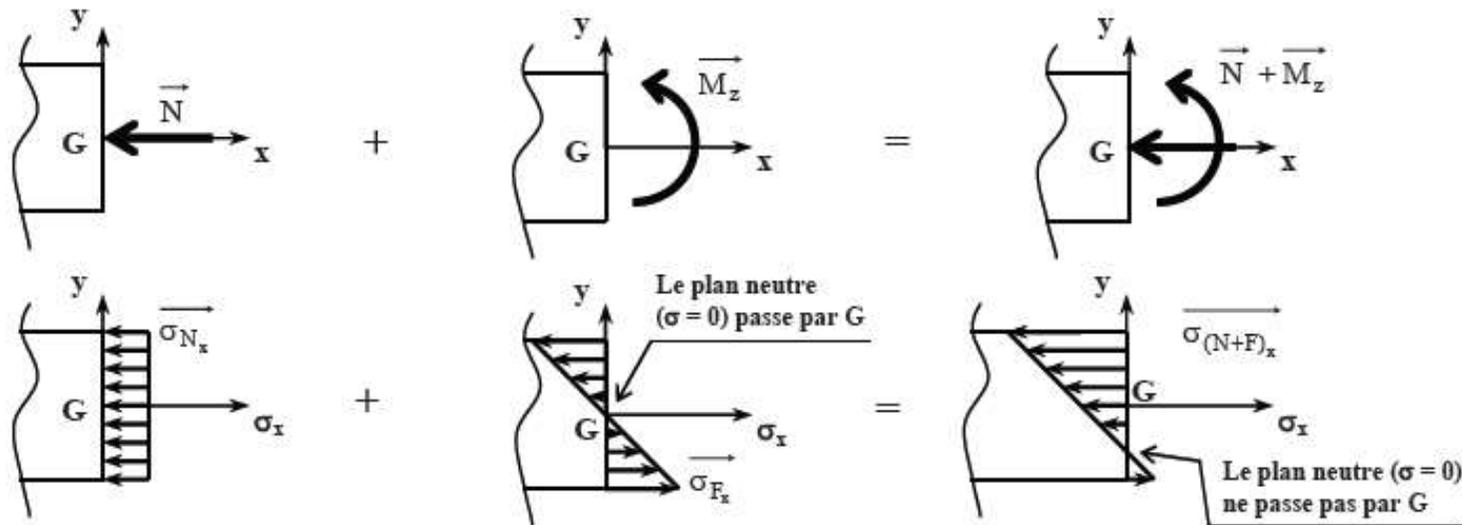
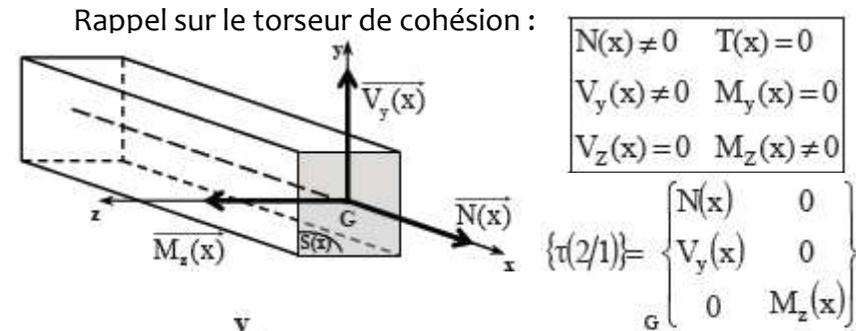
# M1c (7)

## Contraintes normales



Par application du principe de superposition :

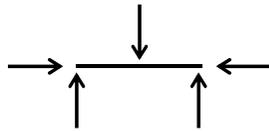
$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$$



$$\sigma_{N_x} = \frac{N}{S} \quad + \quad \sigma_{F_x} = -\frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y \quad = \quad \sigma_{(N+F)_x} = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

## Contraintes normales

### Flexion composée (suite)



Récapitulatif des cas rencontrés

DIAGRAMMES DE REPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES				
dues à N	dues à $M_z$	dues à N et $M_z$		
		Cas où $ \sigma_{F_x}  <  \sigma_{N_x} $	Cas où $ \sigma_{F_x}  =  \sigma_{N_x} $	Cas où $ \sigma_{F_x}  >  \sigma_{N_x} $
 $N < 0$	 $M > 0$	 Section entièrement comprimée	 $y_1 = -\frac{h}{2}$	 Section entièrement tendue
 $N < 0$	 $M < 0$	 Section entièrement comprimée	 $y_1 = +\frac{h}{2}$	 Section entièrement tendue
 $N > 0$	 $M > 0$	 Section entièrement tendue	 $y_1 = +\frac{h}{2}$	 Section entièrement comprimée
 $N > 0$	 $M < 0$	 Section entièrement tendue	 $y_1 = -\frac{h}{2}$	 Section entièrement comprimée

## Contraintes normales

### Vérification des contraintes normales Matériaux acier selon l'EC3 (Eurocode 3)

On compare les contraintes normales maximales à la contrainte élastique admissible du **matériau**.

$$\sigma_{max} \leq \frac{f_y}{\gamma_M}$$

limite élastique de l'acier (cf. pages suivantes, par exemple 235MPa)

Coefficient de sécurité partiel sur les résistances pour les calculs à l'**E.L.U. (État limite ultime)**.

$\gamma_{M_0} = 1$  pour tous les cas sauf pour la résistance de section nette au droit des trous de boulons où  $\gamma_{M_2} = 1,25$

Aux Eurocodes, on fait une vérification équivalente sous une autre forme : on calcule la **sollicitation résistante correspondant aux limites élastique** (pour les sections de classes\* 3 et 4) ou plastique (pour les sections de classes 1 et 2) du matériau.

**Pour la traction**  $N_{Ed} \leq N_{pl,Rd}$  Effort normal sollicitant  $\leq$  Effort normal résistant (plastique)

**Pour la compression**

La formule précédente est uniquement valable quand le **risque de flambement** n'est pas prépondérant : cas plutôt rare (élancement réduit  $\bar{\lambda} \leq 0,2$ )

**Pour la flexion (moment fléchissant)**

$M_{Ed} \leq M_{pl,Rd}$  ou  $M_{el,Rd}$  Moment fléchissant sollicitant  $\leq$  Moment fléchissant résistant (plastique ou élastique)

$$M_{pl,Rd} = W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M_0}}$$

Pour les sections de classes 1 et 2

$$M_{el,Rd} = W_{el,min} \frac{f_y}{\gamma_{M_0}}$$

Pour les sections de classe 3



$$N_{pl,Rd} = A \frac{f_y}{\gamma_{M_0}}$$

Cas particuliers : résistance de la section nette au niveau des perçages (boulons ordinaires ou précontraints HR)

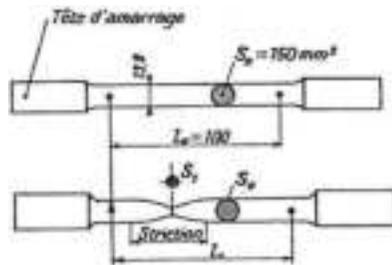
Remarque : Pour la flexion, voir aussi la 2<sup>e</sup> vérification à l'effort tranchant et aux contraintes tangentielles (cisaillement).

\* Les classes de section sont définies ci-après (notion de section plastifiable)

# M1c (8)

## Élasticité linéaire Relation contraintes-déformations

### Diagramme force/allongement d'un essai de traction sur éprouvette acier



Module d'élasticité longitudinale  
ou module d'Young du matériau

Matériau	E (MPa)
Bois	10 000 (variable)
Acier	210 000
Béton	10 000 à 50 000
Aluminium	70000

On remarque principalement 3 zones sur le premier graphe :

**Zone rectiligne de O à A :**  
C'est la zone de déformation élastique. Tant que l'effort F ne dépasse pas  $F_e$ , la suppression de F ramène l'éprouvette à sa longueur d'origine.

ÉLASTICITÉ  
NE PAS CONFondre !  
LINÉARITÉ

Dans cette zone de comportement élastique, le matériau a aussi un comportement linéaire.

**Loi de HOOKE**

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

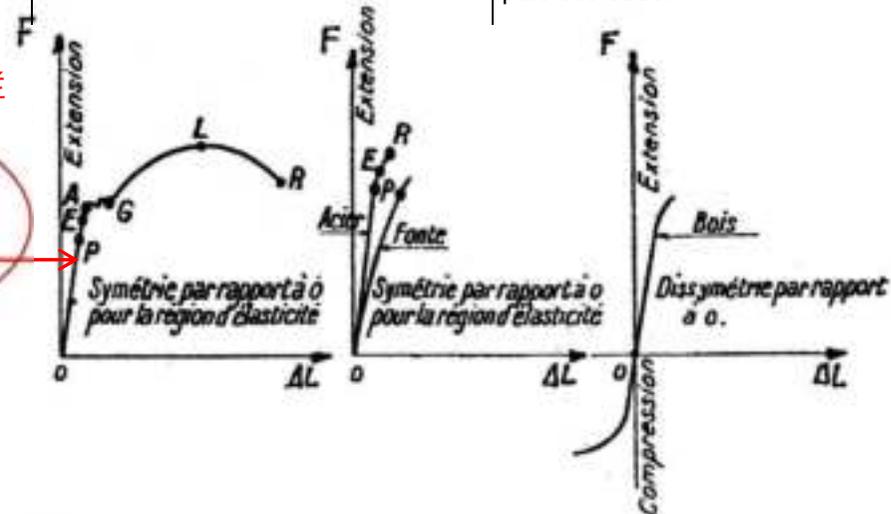
**Palier globalement horizontal de A à G :**

Cette zone très particulière traduit des modifications importantes à l'intérieur de la matière.

Début de la PLASTICITÉ

**Zone parabolique de G à R :**

L'allongement ainsi que la force augmentent progressivement (mais pas de manière rectiligne). Lorsque la force  $F_r$  est atteinte, la section de l'éprouvette diminue localement et subitement (phénomène de striction) puis elle cède.



La déformation  $\epsilon$  est calculée par la relation :

En traction / compression

$$\epsilon(x, y) = \pm \frac{N(x)}{E \cdot A}$$

En flexion simple

$$\epsilon(x, y) = - \frac{Mf(x)}{E \cdot I_{GZ}} \cdot y$$

La longueur initiale de la poutre est notée  $L_0$ .  
L'allongement de la poutre est noté  $\Delta L$  (en valeur algébrique)  
tel que  $L=L_0+\Delta L$   
La déformation  $\epsilon$  est définie par  $\epsilon=\Delta L/L_0$

# M1c (8)

## Élasticité linéaire

### Relation contraintes-déformations

#### Matériaux acier selon l'EC3 (Eurocode 3)

Aciers laminés à chaud :

Norme EN 10025-2	Épaisseur nominale de l'élément : $t$ .			
	$t \leq 40$ mm		$40 < t \leq 80$ mm	
	Limite d'élasticité $f_y$ (MPa)	Résistance à la traction $f_u$ (MPa)	Limite d'élasticité $f_y$ (MPa)	Résistance à la traction $f_u$ (MPa)
S 235	235	360	215	360
S 275	275	430	255	410
S355	355	490	335	470
S450	440	550	410	550

Attention : Aux Eurocodes, quand on travaille en plasticité, on utilise cependant la limite d'élasticité  $f_y$ . La différence se fait sur les autres paramètres pris en compte (par exemple  $W_{pl}$  au lieu de  $W_{el}$ ).

- le module d'élasticité longitudinale :  $E = 210000 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$
- module de cisaillement :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 81000 \text{ MPa}$
- la limite d'élasticité :  $f_y$
- la contrainte de rupture à la traction :  $f_u$
- le coefficient de dilatation :  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- masse volumique :  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

## Élasticité linéaire

### Relation contraintes-déformations

#### Matériaux acier

#### selon l'EC3 (Eurocode 3)

##### Définition des 4 classes de section

L'Eurocode 3 autorise le travail de l'acier en plasticité sous réserve que les profils ne soient pas sensibles aux phénomènes d'instabilité locale lorsqu'on les amène dans le domaine plastique.

Nota : Les structures métalliques sont souvent considérées comme suffisamment rigides (rigidité des éléments et rigidité procurée par le contreventement) pour être étudiées globalement (étude de l'équilibre et recherche des sollicitations) en « analyse élastique » :

- la relation contrainte déformation est linéaire même pour les sections plastifiées (on considère que la contrainte dans l'acier  $y$  vaut  $f_y$ ) et on considère que le degré d'hyperstaticité de la structure n'est pas réduit par des rotules plastique,
- non prise en compte des effets du second ordre (déplacements des nœuds négligés pour l'équilibre et les sollicitations).

Classe	Modèle de comportement	Résistance de calcul	Capacité de rotation plastique
1			Importante
2			Limitée
3			Aucune
4			Aucune

# M1c (8)

## Élasticité linéaire

### Relation contraintes-déformations Matériaux bois selon l'EC5 (Eurocode 5)

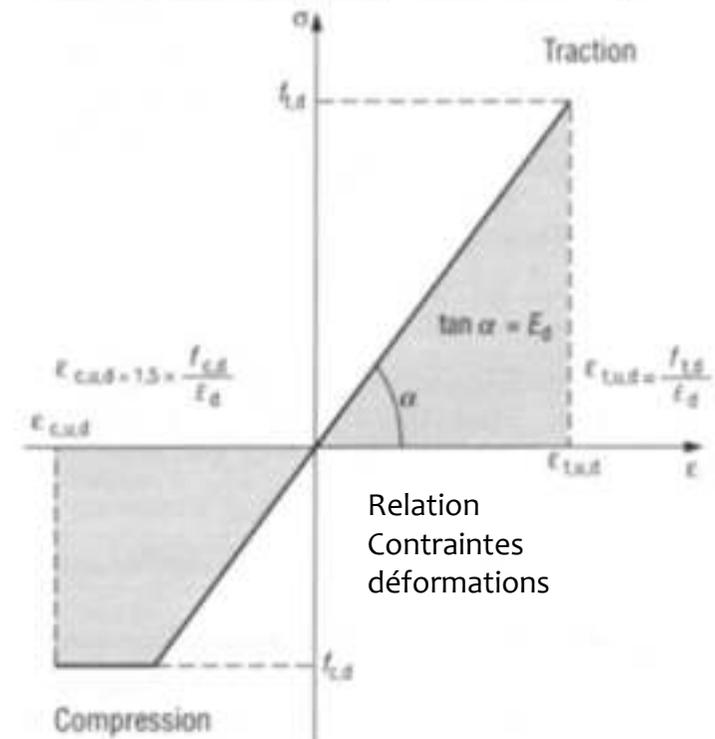
LC : Tableau des caractéristiques mécaniques et physiques du bois Lamellé collé

Caractéristiques	Symbole	Lamellé collé homogène				Lamellé collé combiné			
		GL24h	GL28h	GL32h	GL36h	GL24c	GL28c	GL32c	GL36c
Propriétés de résistance en N / mm <sup>2</sup> = MPa									
Flexion	$f_{m,d}$	24	28	32	36	24	28	32	36
Cisaillement	$f_{v,d}$	2,7	3,2	3,8	4,3	2,2	2,7	3,2	3,8
Propriétés de rigidité en kN / mm <sup>2</sup> = GPa									
Module moyen d'élasticité axial	$E_{0,mean}$	11,6	12,6	13,7	14,7	11,6	12,6	13,7	14,7
Masse volumique en Kg/m <sup>3</sup>									
Masse volumique moyenne évaluée en fonction de la masse volumique caractéristique : $\rho_{mean} = 1,15 \rho_{k,d}$	$\rho_{mean}$	440	470	495	520	405	440	470	495
Pour simplifier : poids volumique		5 KN/m <sup>3</sup>				5 KN/m <sup>3</sup>			

BM : Tableau des caractéristiques mécaniques et physiques du BM (bois massif type résineux)

Caractéristiques	Symbole	C14	C16	C18	C22	C24	C27	C30
Propriétés de résistance en N / mm <sup>2</sup> = MPa								
Flexion	$f_{m,d}$	14	16	18	22	24	27	30
Cisaillement	$f_{v,d}$	1,7	1,8	2	2,4	2,5	2,8	3
Propriétés de rigidité en kN / mm <sup>2</sup> = GPa								
Module moyen d'élasticité axial	$E_{0,mean}$	7	8	9	10	11	11,5	12
Masse volumique en Kg/m <sup>3</sup>								
Masse volumique moyenne	$\rho_{mean}$	350	370	380	410	420	450	460

Essences	Classes visuelles (NF B 53-001)		
	A	B	C
Sapin, épicéa	C 22	C 24	C 30
Douglas	C 22	C 24	C 30
Pin noir, pin Lariole	C 18	C 18	C 27
Pin maritime	C 18	-	-
Peuplier	C 22	-	C 27



# M1c (8)

## Élasticité linéaire Relation contraintes-déformations

### Module de Poisson – Déformations transversales

Lors d'un essai de traction ou de compression sur une poutre, celle-ci subit une déformation longitudinale (respectivement un allongement ou un raccourcissement), mais aussi une déformation latérale perpendiculairement à la direction de l'effort (respectivement une contraction ou une dilatation).

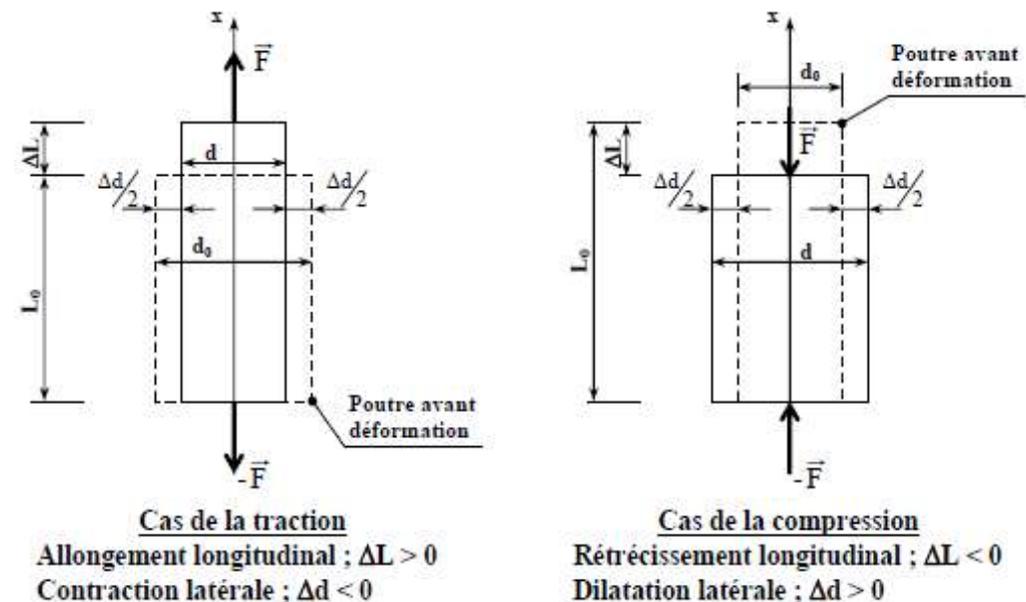
Déformation longitudinale :  $\epsilon_x = \Delta L / L_0$

Déformation transversale :  $\epsilon_{\perp} = \Delta d / d_0$

Le module de Poisson  $\nu$  [nu] est défini tel que :

$$\nu = -\epsilon_{\perp} / \epsilon_x$$

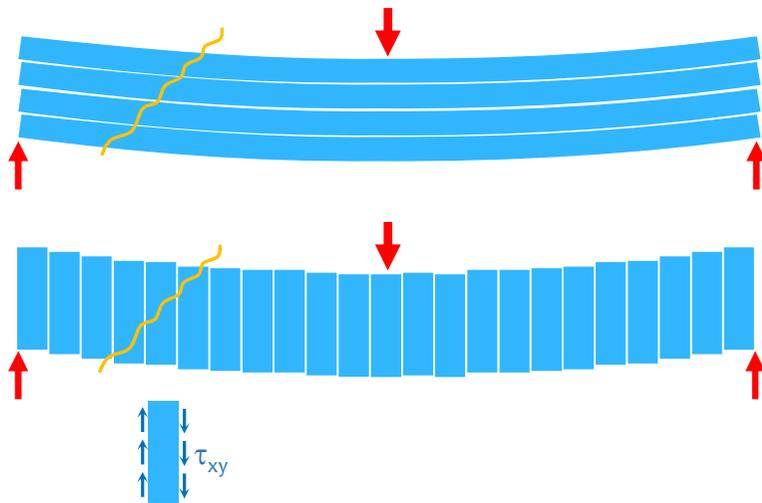
Matériau	$\nu$ (sans unité)
Bois	0,3
Acier	0,27 - 0,30
Béton	0,2



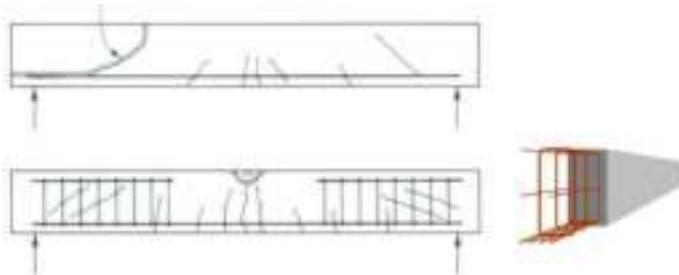
## Contraintes tangentielles

### Cisaillement

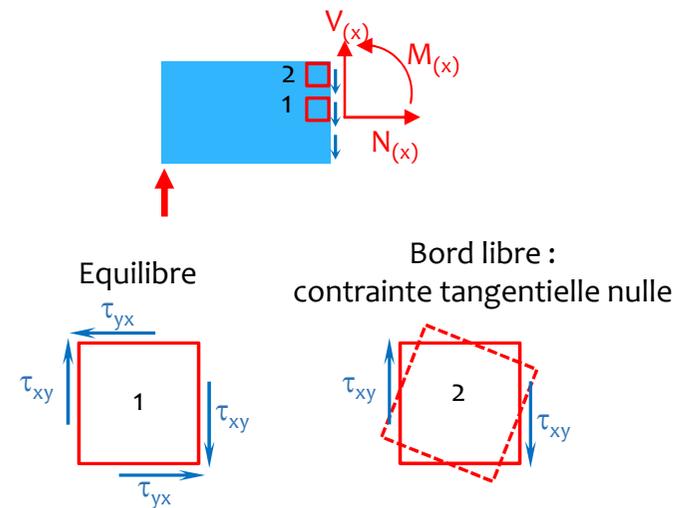
Les contraintes tangentielles décrivent la tendance de la poutre à « cisailer » en feuillets ou en tranches.



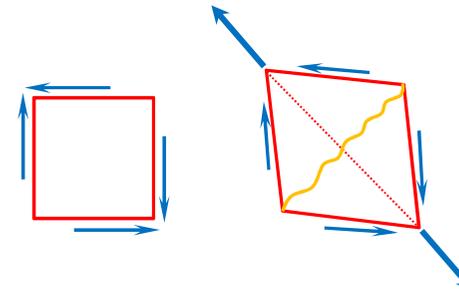
Les armatures transversales (cadres) d'une poutre en béton armé reprennent l'effort tranchant qui est lié au cisaillement. Elles « cousent » les lignes de rupture à 45°.



Isolons le tronçon de gauche et identifions deux éléments de matière (au milieu, en haut).

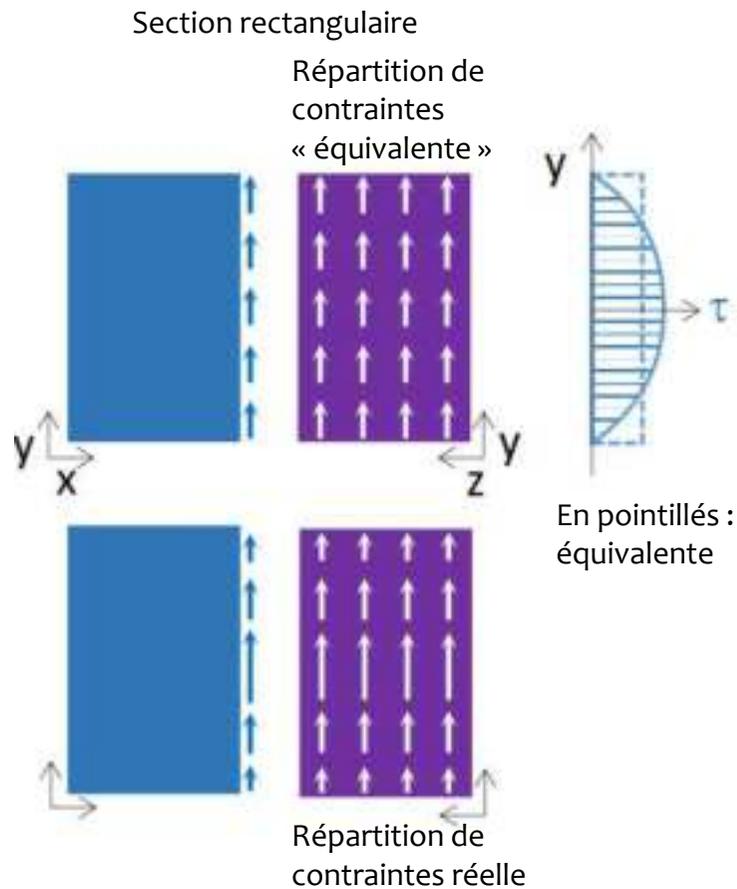


Explication des lignes de rupture inclinées à 45°

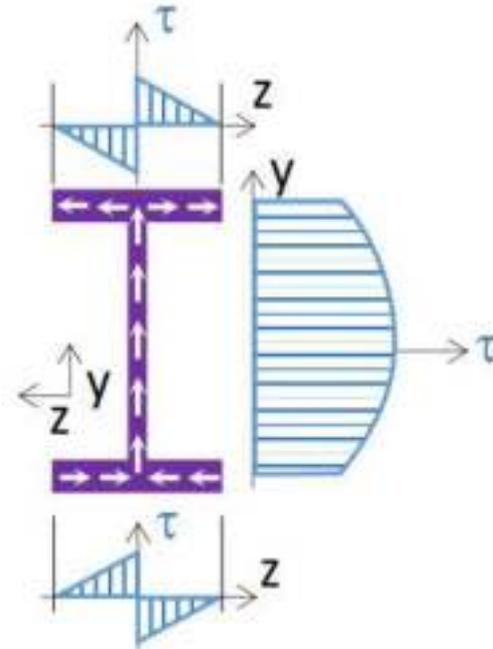


## Contraintes tangentielles

### Exemples de d'allures de diagrammes de contraintes tangentielles



Section IPE (ailes et âme ont des diagrammes distincts)



## Contraintes tangentielles

### Expression de la contrainte tangentielle

$$\tau_y \times b(y) = \frac{V_y(x) \times S_{Gz}(D_{sup})}{I_{Gz}}$$

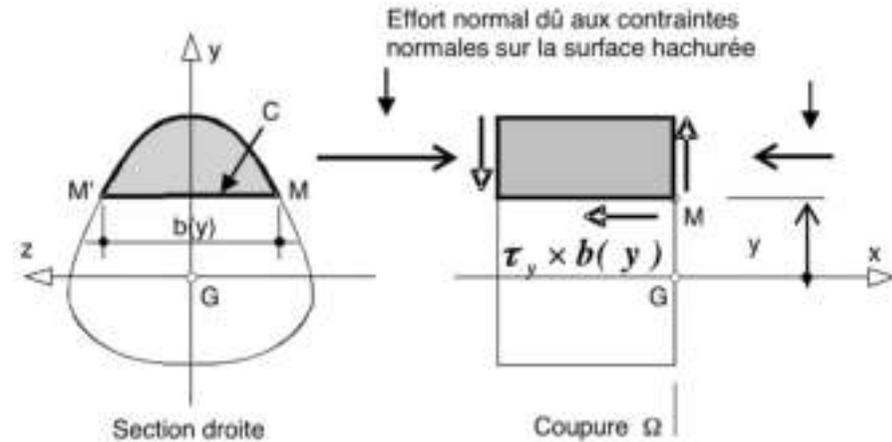
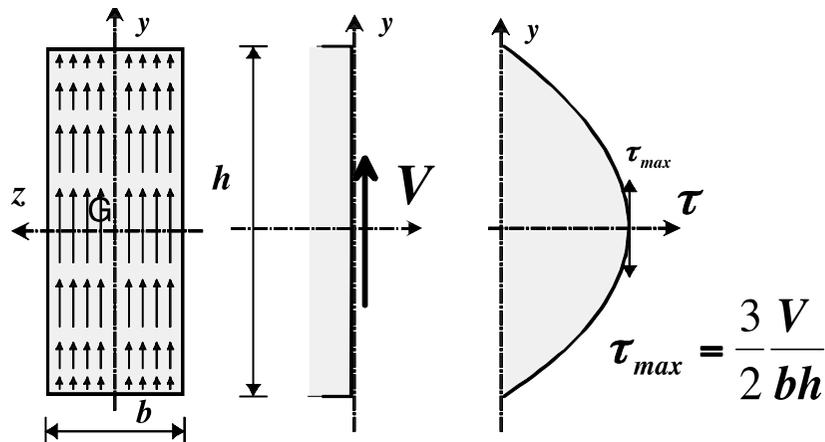
$\tau_y \times b(y)$  est aussi appelé flux de **cisaillement** traversant la courbe C

Soit ( $D_{sup}$ ) la surface située au-dessus de la courbe C, les moments statiques des domaines inf. et sup. sont opposés.

$$S_{Gz}(D_{sup}) = -S_{Gz}(D_{inf})$$

*Remarque : Les équations montrent un phénomène de gauchissement non compatible avec l'hypothèse de Navier-Bernoulli.*

### Cas particulier : section rectangulaire



$\tau_y \times b(y)$  représente l'effort de glissement longitudinal par unité de longueur de poutre, sur la surface définie par la courbe  $C = MM'$ .

Sur la surface hachurée située au-dessus de la courbe  $C = MM'$ , s'exercent des contraintes normales pour lesquelles on a représenté l'effort normal résultant.

En observant la vue en élévation du prisme isolé, on remarque que cet effort de glissement correspond à la différence des efforts normaux agissant sur les extrémités (les sections droites) de ce tronçon de longueur unité. Cet effort de glissement n'existe que si les diagrammes des contraintes normales sont différents  $M = cte$ .

En flexion pure, il n'y a donc pas de cisaillement.

## Contraintes tangentielles

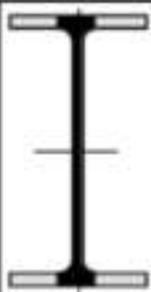
### Vérification des contraintes tangentielles Matériaux acier selon l'EC3 (Eurocode 3)

Comme pour les contraintes normales, on compare en réalité aux Eurocodes la sollicitation agissante à la sollicitation résistante. La comparaison se fait cette fois-ci sous forme de fraction.

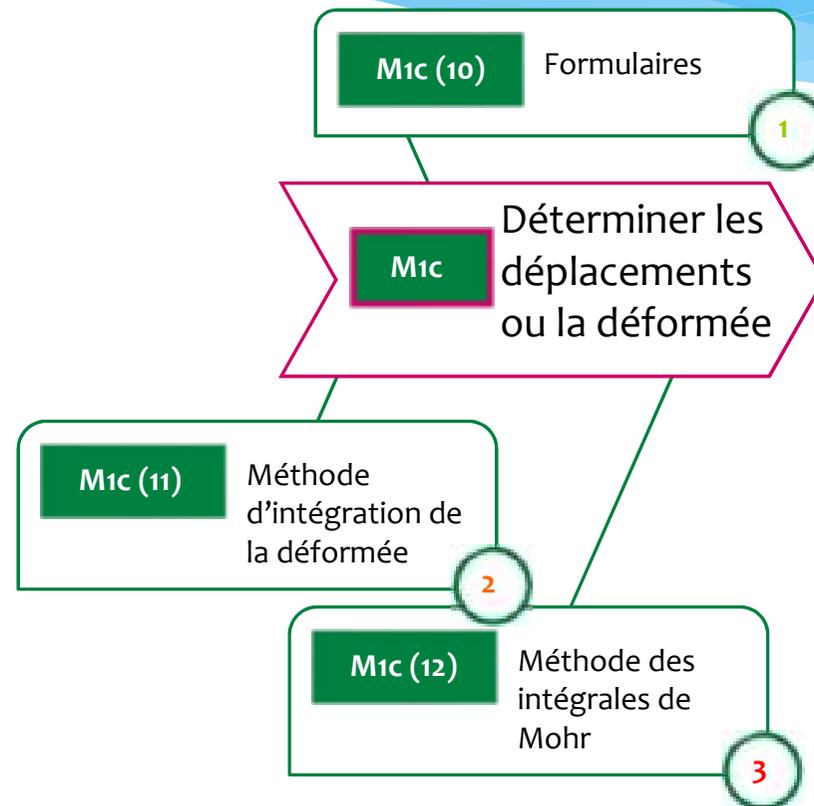
On doit vérifier :  $\frac{V_{Ed}}{V_{c,Rd}} \leq 1,0$

Calcul plastique  $V_{c,Rd} = V_{pl,Rd} = A_v \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 0,58 A_v \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$

- où
- $V_{Ed}$  : effort tranchant (agissant) de calcul à L'E.L.U. ;
  - $V_{pl,Rd}$  : effort tranchant résistant à L'E.L.U. ;
  - $A_v$  : aire de cisaillement donnée dans les catalogues des caractéristiques des profilés.

 <p><b><u>Laminés marchands :</u></b> Les valeurs de l'aire plastifiée (<math>A_v</math>) sont données dans les tableaux de caractéristiques des profilés.</p>	 <p><b><u>Profilés Reconstitués Soudés :</u></b> Pour les P.R.S., la valeur de <math>A_v</math> est celle de l'âme seule</p>
---	---

# Sommaire M1c – partie 4

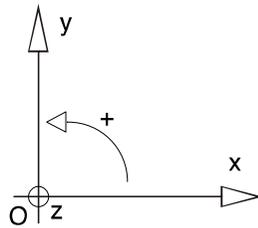


- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

# M1c (10)

## Formulaires des déformations

Repère



Éléments de réduction

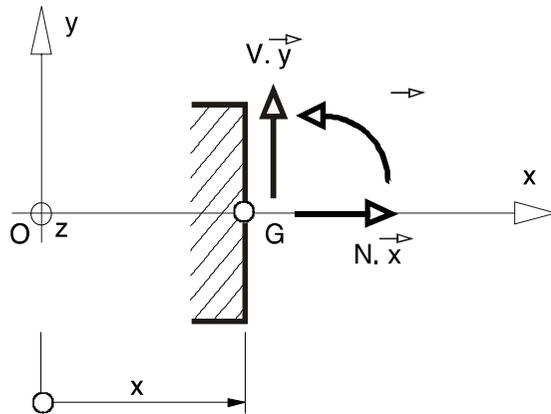


Schéma mécanique	Rotation aux appuis	Flèche
	$\omega_A = -\frac{pL^3}{24EI}$ $\omega_B = \frac{pL^3}{24EI}$	$f_{(L/2)} = \frac{5pL^4}{384EI}$
	$\omega_A = -\frac{Fa}{6EIL}(L-a)(2L-a)$ $\omega_B = \frac{Fa}{6EIL}(L^2 - a^2)$	<p>pour <math>a \leq \frac{L}{2}</math></p> $f_{(L/2)} = \frac{Fa}{48EI}(3L^2 - 4a^2)$
	$\omega_A = \frac{CL}{3EI}$ $\omega_B = -\frac{CL}{6EI}$	$f_{(L/2)} = \frac{CL^2}{16EI}$
	$\omega_B = -\frac{pL^3}{6EI}$	$f_{(L)} = \frac{pL^4}{8EI}$
	$\omega_B = -\frac{FL^2}{2EI}$	$f_{(L)} = \frac{FL^3}{3EI}$

# M1c (10)

## Formulaires des déformations admissibles

### Matériaux acier selon l'EC3 (Eurocode 3)

#### Flèches

Les valeurs limites sont destinées à être comparées aux valeurs calculées à partir des combinaisons E.L.S. (États limites de service).

#### 2 Valeurs limites recommandées de flèches verticales pour les poutres de bâtiments

$L$  : Portée de la poutre. (Pour les poutres en porte à faux, la longueur fictive  $L$  à considérer est égale à deux fois la longueur réelle du porte à faux.)

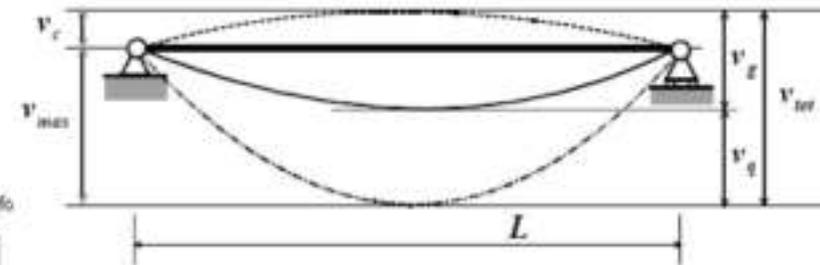
Conditions	Limites	
	$v_{max}$	$v_g$
Toitures en général (non accessible aux usagers sauf aux personnes chargées de l'entretien).	$L/200$	$L/250$
Toitures supportant fréquemment du personnel autre que le personnel d'entretien.	$L/200$	$L/300$
Planchers en général.	$L/200$	$L/300$
Planchers et toitures supportant des cloisons en plâtre ou en autres matériaux fragiles ou rigides.	$L/250$	$L/350$
Planchers supportant des poteaux.	$L/400$	$L/500$
Cas où $v_{max}$ peut nuire à l'aspect du bâtiment.	$L/250$	

#### 3 Valeurs limites des flèches horizontales

	Limites	
Bâtiments industriels à niveau unique sans pont roulant, avec parois non fragiles : déplacement en tête de poteaux, sans exigence restrictive en matière de déformation	$h/150$	
Éléments support de bardage métallique :	montants	$h/150$
	lisses	$L/150$
Autres bâtiments à niveau unique : déplacement en tête de poteaux bâtiments ayant des exigences particulières en matière de déformations (ex. : traçage des parois, aspect, confort, utilisation). Ils peuvent être simples ou à travées multiples.	$h/250$	

où  $h$  est la hauteur du poteau ou de l'étage,  $L$  est la longueur de la lisse.

#### 1 notations



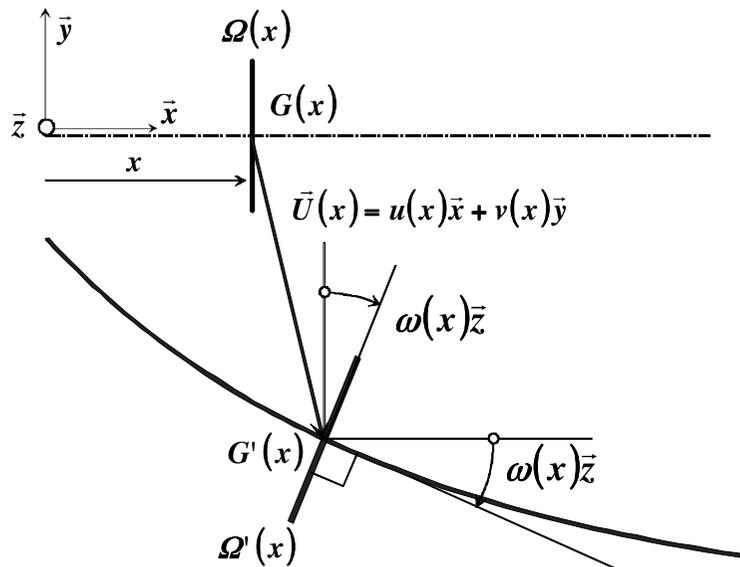
- $v_c$  : contre-flèche dans l'élément structural non chargé
- $v_g$  : flèche sous charges permanentes de la combinaison d'actions correspondantes
- $v_q$  : flèche sous charges variables de la combinaison d'actions correspondante
- $v_{tot}$  : flèche totale  $v_{tot} = v_g + v_q$
- $v_{max}$  : flèche résiduelle compte tenu de la contre-flèche éventuelle  $v_{max} = v_g + v_q - v_c = v_{tot} - v_c$

L'intérêt d'imprimer une contre-flèche à une poutre est bien de réduire au maximum la flèche finale.

## Déformée

## Expression de la déformée

### Expression des déplacements et rotations



La section droite subit une translation égale au déplacement du point G d'abscisse x :

$$\vec{GG'} = \vec{U}(x) = u(x)\vec{x} + v(x)\vec{y}$$

La section droite subit une rotation :

$$\vec{\omega} = \omega(x)\vec{z}$$

Relations permettant de déterminer l'équation de la ligne déformée :

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \omega'(x)$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x \frac{N(\xi)}{EA} d\xi$$

Par une double intégration de l'expression suivante et une connaissance des conditions aux limites, on peut en déduire l'équation de la flèche v(x)

$$EI \cdot v''(x) = M(x)$$

#### Exemple :

$$EI \cdot v''(x) = -p/2 \cdot x^2 + pL/2 \cdot x$$

1<sup>re</sup> intégration :

$$EI \cdot v'(x) = -p/6 \cdot x^3 + pL/4 \cdot x^2 + a$$

Conditions aux limites :

$$v'(x) = \omega(x), \text{ la rotation } \omega(L/2) = 0$$

$$\text{Rotation aux appuis : } EI \cdot v'(0) = -pL^3/24 \text{ soit } v'(0) = -pL^3/24EI$$

2<sup>e</sup> intégration :

$$EI \cdot v(x) = -p/24 \cdot x^4 + pL/12 \cdot x^3 - pL^3/24 \cdot x + b$$

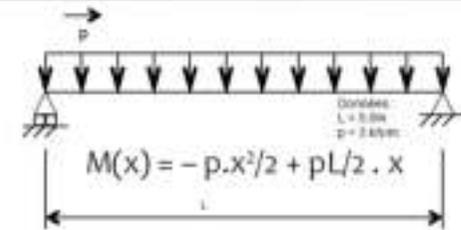
Conditions aux limites : donc b = 0

$$v(0) = 0$$

$$EI \cdot v(x) = -p/24 \cdot x^4 + pL/12 \cdot x^3 - pL^3/24 \cdot x$$

$$\text{Flèche maximum : } EI \cdot v(L/2) = -p/24 (L/2)^4 + pL/12 \cdot (L/2)^3 - pL^3/24 \cdot L/2$$

$$EI \cdot v(L/2) = -5pL^4/384 \text{ soit } v(L/2) = -5pL^4/384EI$$



$$EI \cdot 0 = -p/6 (L/2)^3 + pL/4 \cdot (L/2)^2 + a$$

$$\text{donc } a = -pL^3/24$$

$$EI \cdot v'(x) = -p/6 \cdot x^3 + pL/4 \cdot x^2 - pL^3/24$$

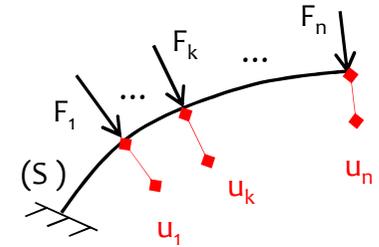
## Méthodes énergétiques Intégrales de Mohr

Se reporter au cours sur les méthodes énergétiques et l'utilisation des intégrales de Mohr pour déterminer les déplacements et rotations des structures isostatiques et hyperstatiques.

**Théorème de Castigliano**

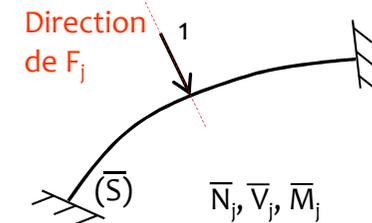
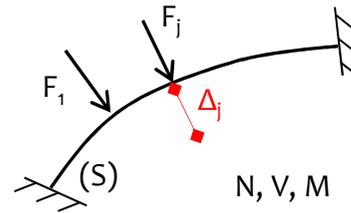
$$u_k = \frac{\partial W}{\partial F_k}$$

avec  $W_e = \frac{1}{2} \int_{structure} \frac{[M_z(x)]^2}{EI_{Gz}} dx$



**Théorèmes de Müller-Breslau  
et de Pasternak**

$$\Delta_j = \int_{structure} \frac{M \times \bar{M}_j}{EI} dx$$



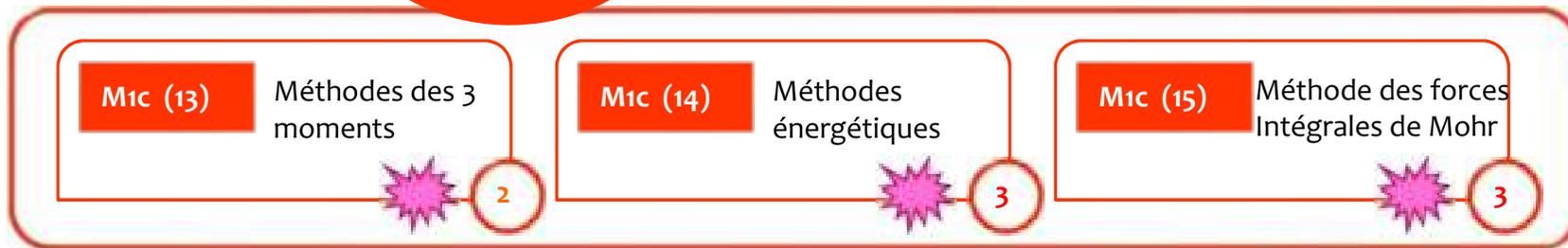
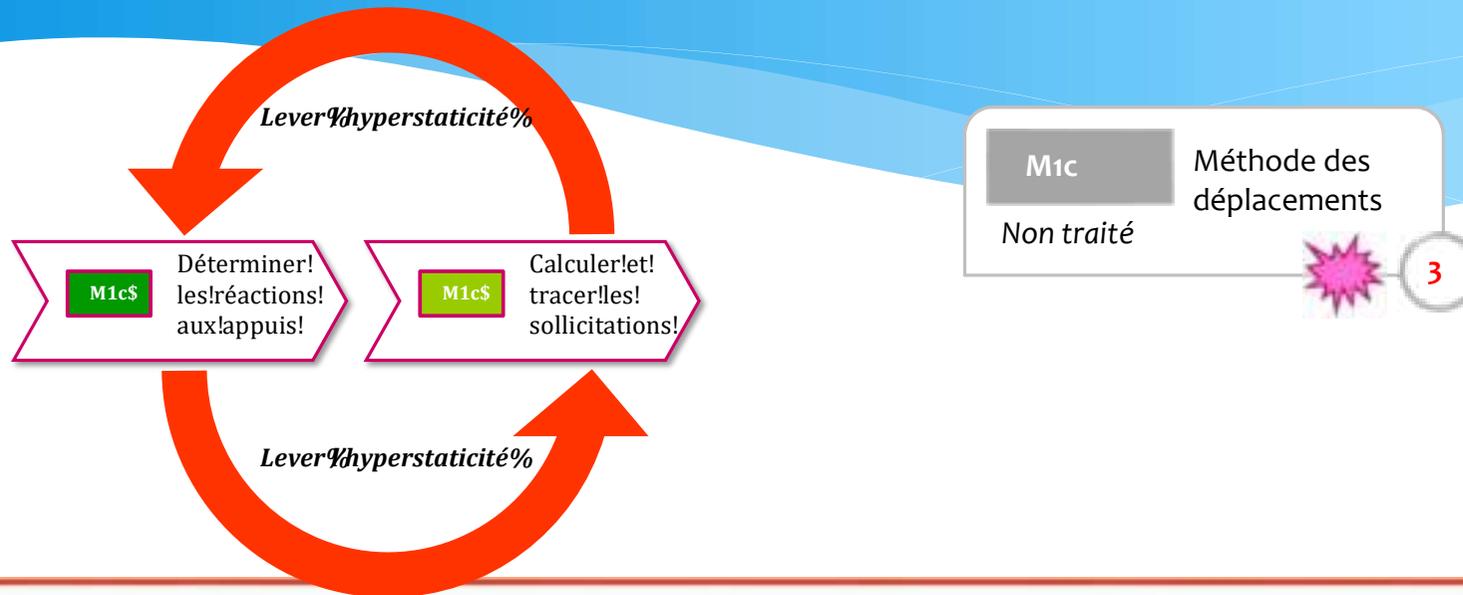
**Intégrales de Mohr**

$$\int_0^L m_i(x) \times m_j(x) \times dx$$

$m_j(x)$	$M_j$	$M_j$
$m_i(x)$	$M_i$	$M_i$
	$LM_iM_j$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$
	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$

Extrait du tableau

# Sommaire M1c – partie 5



- 1 Niveau bases
- 2 Niveau perfectionnement
- 3 Niveau expert

## Méthode des 3 moments

Aussi appelée « Formule de Clapeyron »  
 Application des formules de Müller-Breslau (cf. ci-après)

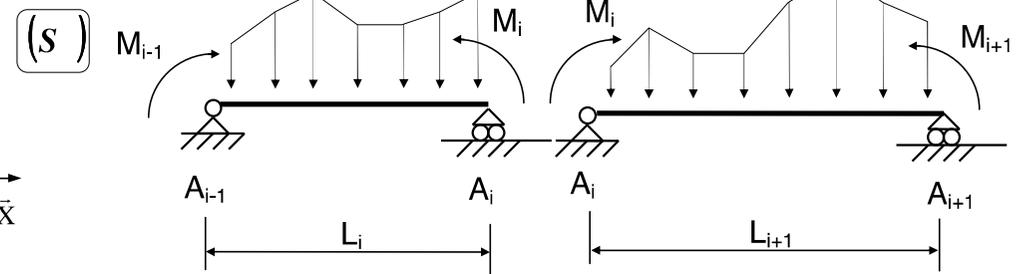
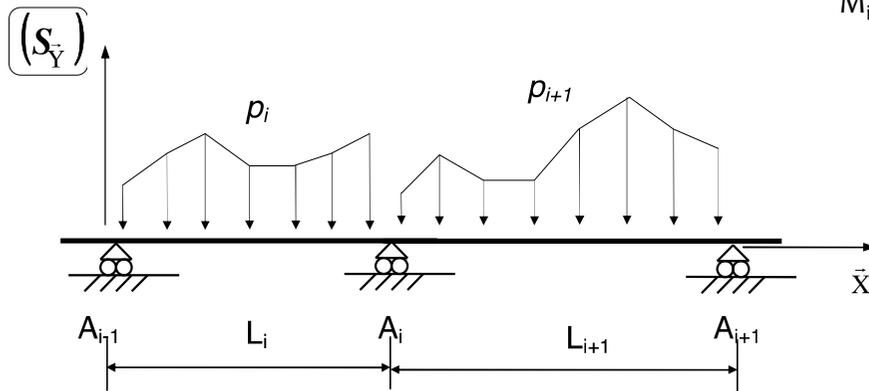
Applicable aux poutres continues (et aux portiques moyennant quelques adaptations) pour lever l'hyperstaticité du système.

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega_{di}^0 - \omega_{gi}^0)$$

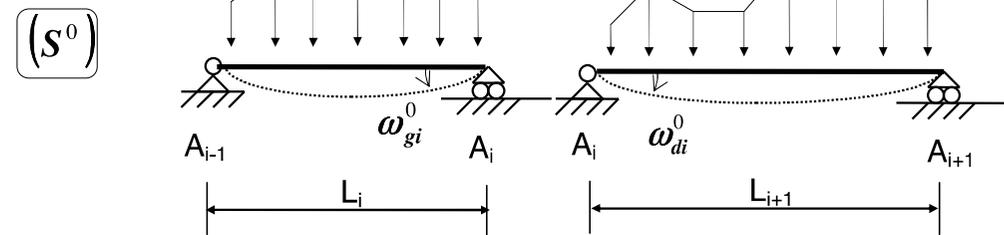
Hypothèses pour cette notation :

- $EI$  = constante sur l'ensemble de la poutre,
- en l'absence de dénivellations d'appuis.

$M_{i-1}, M_i, M_{i+1}$  : « Moments de continuité »



Système isostatique associé



Remarque 1 : Les rotations  $\omega$  des S.I.A. (systèmes isostatiques associés) pourront être lues dans les formulaires.

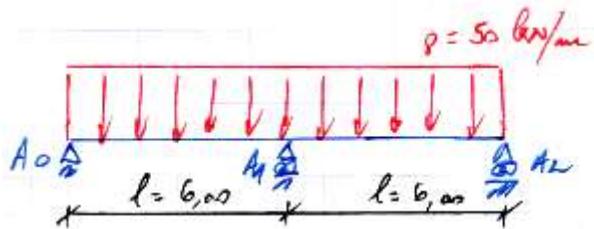
Remarque 2 : En cas d'encastrement, il suffit d'ajouter une travée fictive non chargée de longueur nulle appuyée sur un appui simple et un appui double.

# M1c (13)

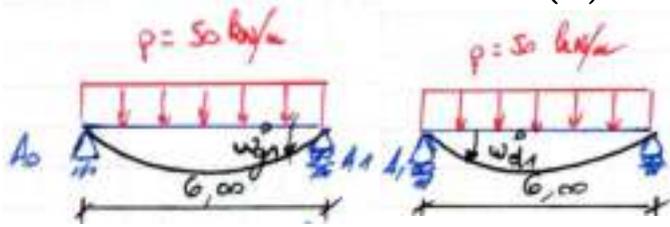
## Méthode des 3 moments

### Application

Système hyperstatique de degré 1 : poutre continue avec un appui simple excédentaire.



2. Détermination des rotations en  $A_1$  par lecture dans les formulaires cf. M1c(10).



$$\omega_{g1}^0 = \frac{pl^3}{24EI}$$

$$\omega_{d1}^0 = \frac{-pl^3}{24EI}$$

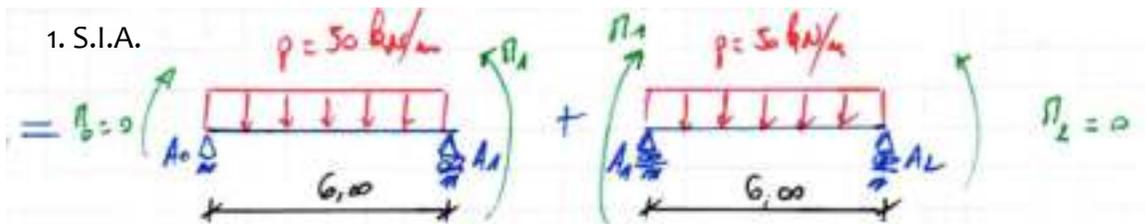
3. Détermination de  $M_1$  par application de la formule des 3 moments.

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega_{di}^0 - \omega_{gi}^0)$$

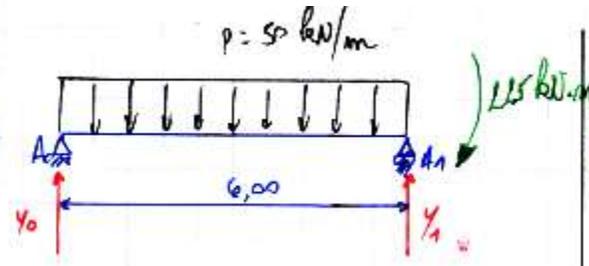
$$6M_0 + 2(6 + 6)M_1 + 6M_2 = 6EI \frac{-2pl^3}{24EI}$$

$$M_1 = \frac{-pl^3}{48} = \frac{-50 \times 6^3}{48} = -225 \text{ kN.m}$$

1. S.I.A.



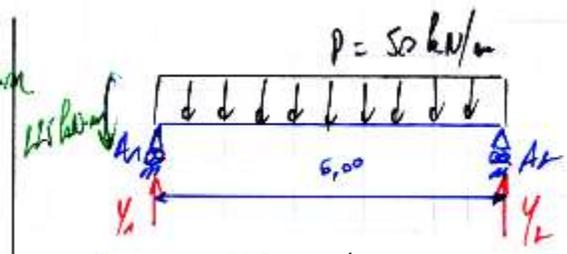
4. Détermination des actions de liaison.



$$\text{PFS: } \begin{cases} \Sigma F/x = 0 \\ \Sigma F/y = 0 \\ \Sigma M/A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma F/x = 0 \text{ inutile} \\ Y_0 + Y_1 - 50 \times 6 = 0 \\ -225 - 50 \times 6 \times 3 + 6Y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = 187,5 \text{ kN} \\ Y_0 = 112,5 \text{ kN} \end{cases}$$



$$\text{PFS: } \begin{cases} \Sigma F/x = 0 \\ \Sigma F/y = 0 \\ \Sigma M/A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma F/x = 0 \text{ inutile} \\ Y_0 + Y_1 - 50 \times 6 = 0 \\ +225 + 50 \times 6 \times 3 - 6Y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = 187,5 \text{ kN} \\ Y_2 = 112,5 \text{ kN} \end{cases}$$

## Méthodes énergétiques

### Expression de l'énergie potentielle de déformation (ou potentiel interne)

Hypothèses

- Cas des poutres droites à plan moyen de symétrie chargées dans ce plan.
- En négligeant les déformations dues à l'effort tranchant.

Poutre de longueur L

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{[N(x)]^2}{EA} + \frac{[M_z(x)]^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

Structure composée de poutres droites

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{structure} \left[ \frac{[N(x)]^2}{EA} + \frac{[M_z(x)]^2}{EI_{Gz}} \right] dx$$

En général, on utilisera les expressions suivantes :

Pour une poutre en flexion simple et composée :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{structure} \frac{[M_z(x)]^2}{EI_{Gz}} dx \quad \text{En négligeant les déformations dues à l'effort normal}$$

Poutre une poutre bi-articulée, soumise à  $N(x) = Cte$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{[N(x)]^2}{EA} \right] dx = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA}$$

*Remarque 1 :* En flexion simple, les énergies de déformation de l'effort tranchant sont en général très inférieures à celles du moment fléchissant.

*Remarque 2 :* En flexion composée, les énergies de déformation de l'effort tranchant et de l'effort normal sont en général très inférieures à celles du moment fléchissant.

## Méthodes énergétiques

### Théorème de l'énergie élastique

L'énergie de déformation est égale au travail des forces extérieures.

$$W_{def.} = \Delta \mathcal{J}_{ext}$$

Aussi appelé « Principe de Clapeyron »

Remarque 1 : Ne permet pas de lever l'hyperstaticité d'un système.

Remarque 2 : Ne permet pas de calculer le déplacement en un point où il n'y a pas d'effort appliqué.

On retiendra : le principe de superposition n'est pas applicable à l'énergie potentielle élastique car  $W_e$  est une forme quadratique des forces appliquées

#### Démonstration

Théorème fondamental de l'énergie

$$\Delta T + \Delta Q = \Delta U + \Delta \mathcal{J}_{ext}$$

Énergie cinétique      Chaleur      Énergie interne      Travail des forces extérieures

Statique :  $\Delta T = 0$

Adiabatique :  $\Delta Q = 0$

L'énergie interne est lié à l'énergie de déformation :  $\Delta U = -W_{def.}$

## Méthodes énergétiques

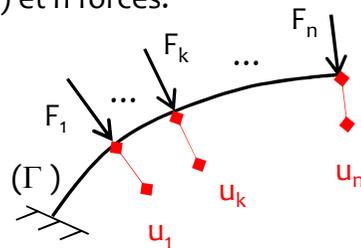
### Théorème de Castigliano

$$u_k = \frac{\partial W}{\partial F_k}$$

Considérons une poutre ( $\Gamma$ ) et n forces.

$W$  : énergie interne

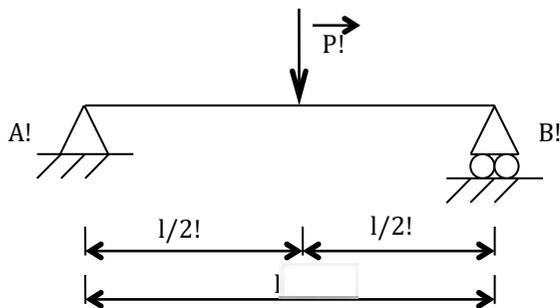
$$W = W(F_1, F_2, \dots, F_n)$$



Remarque : à utiliser avec l'expression de l'énergie interne :

$$W = \frac{1}{2} \int \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{V^2}{GS_y} + \frac{M^2}{EI} \right) d\Gamma$$

### Application



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq l/2 & M(x) = \frac{Px}{2} \\ l/2 \leq x \leq l & M(x) = \frac{-Px}{2} + \frac{Pl}{2} \end{cases} \quad W = W_{\text{déf}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

$$W = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^{l/2} \frac{P^2 x^2}{4} dx + \int_{l/2}^l \left( \frac{-Px}{2} + \frac{Pl}{2} \right)^2 dx \right] \Rightarrow f = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

### Démonstration

On sait que :

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i \times F_i \\ u_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \times F_j \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial F_k} = c_{ik}$$

Avec  $c_{ij}$  le coefficient d'influence  
Rappel :  $c_{ij} = c_{ji}$  (théorème de réciprocité)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_k} &= \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial F_k} F_i = \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ik} F_i \\ &= \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ki} F_i = u_k \end{aligned}$$

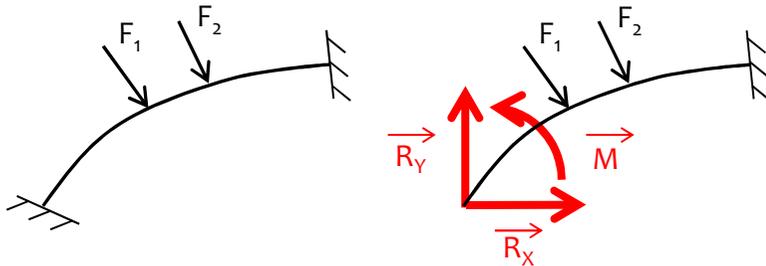
## Méthodes énergétiques

### Théorème de Ménabréa

Dans une structure hyperstatique quelconque dont les liaisons surabondantes ont été réalisées sans lui imposer de déformation élastique, les valeurs des réactions hyperstatiques correspondantes à l'équilibre rendent stationnaires les valeurs de l'énergie de déformation du système.

#### Exemple

La structure suivante est hyperstatique de degré 3.



Dans la structure isostatique associée,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $M$  sont les inconnues hyperstatiques qui garantissent des déplacements et une rotation nulle :

$$\frac{\partial W}{\partial R_x} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial R_y} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial M} = 0$$

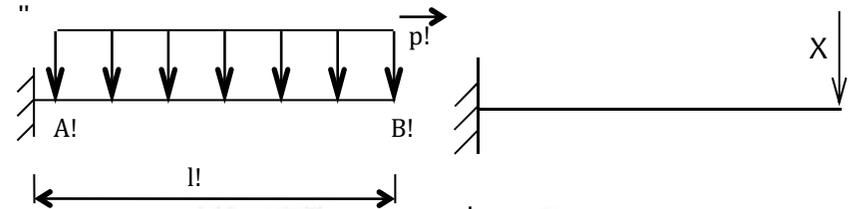
Remarque : à utiliser pour lever l'hyperstaticité d'un système.

### Théorème de la charge fictive

Si il n'y a pas d'effort à l'endroit où l'on veut calculer le déplacement, il suffit d'ajouter une force fictive  $X$ .

#### Application

Calculez la flèche à l'extrémité de la poutre!



$$M = \frac{-p(l-x)^2}{2} \quad M = -X(l-x)|_{x=0}$$

$$M = \frac{-p(l-x)^2}{2} - X(l-x)|_{x=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -(l-x)$$

$$W = \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial X} dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} \Big|_{x=0} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[ \frac{-p(l-x)^2}{2} - X(l-x) \right] (-l+x) dx \Big|_{x=0}$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{p(l-x)^3}{2} dx$$

$$f = \frac{pl^4}{8EI}$$

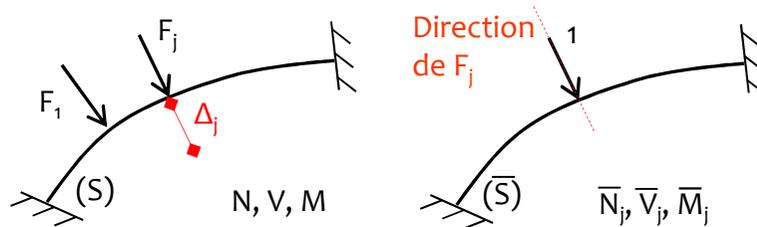
- 1 Dériver dans l'intégrale
- 2 Poser  $X=0$
- 3 Intégrer

## Méthodes énergétiques

### Théorème de Müller-Breslau

Le travail d'un effort unitaire appliqué à une structure est égal au travail des efforts internes qu'il développe dans cette structure.

$$\Delta_j = \int_{structure} \frac{M \times \bar{M}_j}{EI} dx$$



- $E$  : Module d'élasticité longitudinale ou module d'Young
- $I$  : Moment quadratique
- $\Delta_j$  : Déplacement au point  $j$ ,
- $M$  : Moment de flexion, dans la structure étudiée ( $S$ )
- $\bar{M}_j$  : Moment de flexion, dans ( $\bar{S}_j$ ) qui correspond à la structure initiale ( $S$ ) soumise à un facteur sollicitant unité (force unité ou couple unité =1) appliqué au point  $j$ .

Dans le cas de structures composées de poutres et de barres bi-articulées :

$$\Delta_j = \int_{structure} \frac{M \times \bar{M}_j}{EI} dx + \sum_{poutres \text{ bi-articulées}} \frac{N \times \bar{N}_j}{EA} L$$

Application : voir page suivante

Généralisation du théorème de Castigliano

Particularisation du théorème de Bertrand de Fonvirolant

### Démonstration

On sait que :

$$\begin{cases} W = \frac{1}{2} \int_{structure} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{T_y^2}{GS_y} + \frac{M^2}{EI} \right) ds \\ \Delta_j = \frac{\partial W}{\partial F_j} \quad (\text{Castigliano}) \end{cases}$$

Pour simplifier, on considèrera uniquement l'énergie de déformation liée au moment fléchissant.

$$W = \frac{1}{2} \int_{structure} \frac{M^2}{EI} ds \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial F_j} = \int_{structure} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_j} ds$$

D'après le principe de superposition

$$M = \sum_i F_i \bar{M}_i \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial F_j} = \bar{M}_j \Rightarrow \Delta_j = \int_{structure} \frac{M \bar{M}_j}{EI} ds$$

Remarque 1 : à utiliser pour déterminer un déplacement.

Remarque 2 : à utiliser pour lever l'hyperstaticité d'un système, en constatant un déplacement nul au niveau de l'inconnue hyperstatique à lever.

Remarque 3 : on pourra utiliser les intégrales de Mohr pour simplifier les calculs de l'intégrale.

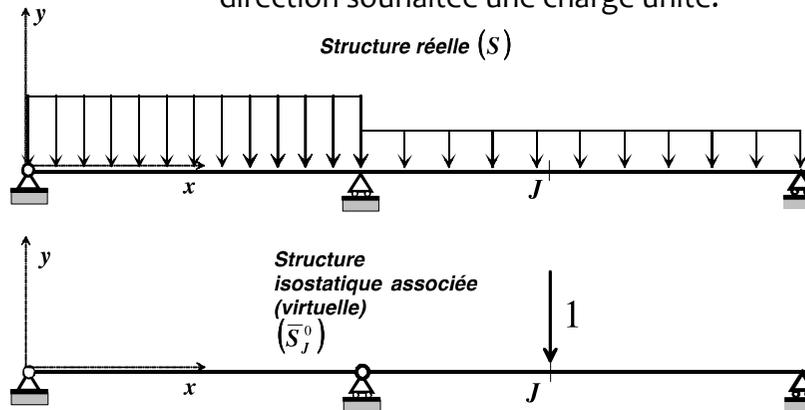
## Méthodes énergétiques

### Théorème de Pasternak

$$\Delta_j = \int_{structure} \frac{M(x) \times \bar{M}_j^0(x)}{EI} dx$$

$M(x)$  représente le moment fléchissant dans la structure réelle

$\bar{M}_j^0$  représente le moment fléchissant dans la structure isostatique associée soumise à un facteur sollicitant unité (= 1) appliqué au point J



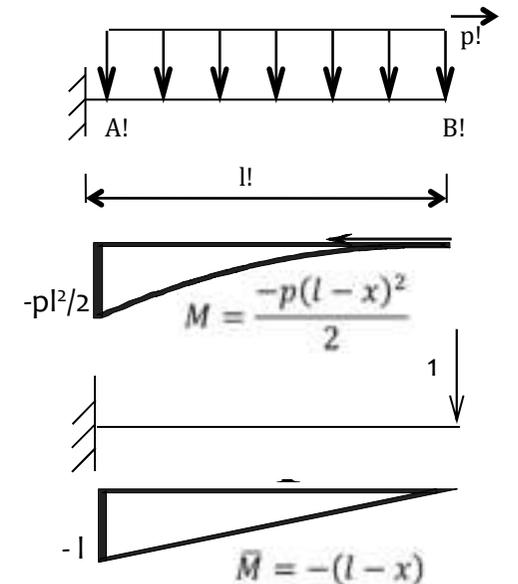
Pour déterminer le déplacement en un point J d'une structure hyperstatique suivant une direction donnée, on applique en ce point J dans une de ses structures associées isostatiques (structure virtuelle) suivant la direction souhaitée une charge unité.

Dans le cas de structures composées de poutres et de barres bi-articulées :

$$\Delta_j = \int_{structure} \frac{M \times \bar{M}_j^0}{EI} dx + \sum_{poutres\ bi-articulées} \frac{N \times \bar{N}_j^0}{EA} L$$

### Application

Calculez! la flèche! à l'extrémité! de la poutre!  
!!



Intégrales de mohr (cf. page suivante):

$$\int_0^L m_i(x) \times m_j(x) \times dx = \frac{1}{4} L M_i M_j$$

$$f = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{4} l \left( \frac{-pl^2}{2} \right) \times (-l) = \frac{pl^4}{8EI}$$

# M1c (14)

## Méthodes énergétiques

### Intégrales de Mohr

$$\int_0^L m_i(x) \times m_j(x) \times dx$$

$m_i(x)$								
$m_j(x)$								
$M_i$	$LM_iM_j$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{2}LM_i(M_j + M'_j)$	$\frac{2}{3}LM_iM_j$	$\frac{2}{3}LM_iM_j$	$\frac{2}{3}LM_iM_j$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$
$M_i$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$	$\frac{1}{6}LM_i(2M_j + M'_j)$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$	$\frac{5}{12}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_iM_j$	$\frac{1}{12}LM_iM_j$
$M_i$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{6}LM_iM_j$	$\frac{1}{6}LM_i(M_j + 2M'_j)$	$\frac{1}{3}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_iM_j$	$\frac{5}{12}LM_iM_j$	$\frac{1}{12}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_iM_j$
$M_i$	$\frac{1}{2}LM_j(M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6}LM_j(2M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6}L\left(\frac{2M_iM_j + M_iM'_j + M'_iM_j + 2M'_iM'_j}{M'_iM_j + 2M'_iM'_j}\right)$	$\frac{1}{3}LM_j(M_i + M'_i)$	$\frac{1}{12}LM_j \times (5M_i + 3M'_i)$	$\frac{1}{12}LM_j \times (3M_i + 5M'_i)$	$\frac{1}{12}LM_j \times (3M_i + M'_i)$	$\frac{1}{12}LM_j \times (M_i + 3M'_i)$
$M_i$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{6}LM_iM_j\left(1 + \frac{x'}{L}\right)$	$\frac{1}{6}LM_i\left[\begin{matrix} M_j\left(1 + \frac{x'}{L}\right) + \\ M'_j\left(1 + \frac{x}{L}\right) \end{matrix}\right]$	$\frac{1}{3}LM_iM_j\left(1 + \frac{xx'}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}LM_iM_j \times \left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}LM_iM_j \times \left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}LM_iM_j \times \left(\frac{3x'}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}LM_iM_j \times \left(\frac{3x}{L} + \frac{x'^2}{L^2}\right)$
$M_i$	$\frac{1}{2}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_iM_j$	$\frac{1}{4}LM_i(M_j + M'_j)$	$\frac{5}{12}LM_iM_j$	$\frac{17}{48}LM_iM_j$	$\frac{17}{48}LM_iM_j$	$\frac{7}{48}LM_iM_j$	$\frac{7}{48}LM_iM_j$

Dans le tableau,  $M_i$ ,  $M_j$ ,  $M'_i$ ,  $M'_j$ , sont les extremums des fonctions  $m_i(x)$  et  $m_j(x)$ . Ils sont à prendre en valeurs algébriques.

Remarque : il existe d'autres tableaux.